APPENDIX

There are 4 appendices the end of the dissertation work. In all of the following appendices, there are examples in case of finite set X, the elements of idempotent and regular elements of $B_X(D)$ semigroup given for the class semilettices are presented and it is shown that theoretical and practical calculations coincide.

WORKS

1. Ya. Diasamidze And A. Bakuridze. Idempotent Elements Of The Semigroups Of Binary Relations Defined By Semilattices Of The Class $\Sigma_4(X,8)$. Proceedings of A. Razmadze Mathematical institute, vol. 166 (2014), pp. 9–30.
2. Ya. Diasamidze And A. Bakuridze. Regular Elements of The Semigroup $B_X(D)$ Defined By Semilattices of The Class $\Sigma_4(X,8)$ and Their Calculation. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, vol. 165 (2014), pp. 41–66.
3. Yasha Diasamidze And Alexander Bakuridze. On Some Properties of Regular Elements of Complete Semigroups Defined By Semilattices of The Class $\Sigma_4(X,8)$. International Journal of Engineering Science and Innovative Technology , vol. 4, issue 4, July 2015. www.ijiset.com;
4. Alexander Bakuridze. Generated Sets of The Complete Semigroup Binary Relations Defined by Semilattices of The $\Sigma_1(X,2)$. International Journal of Innovative Science Engineering and Technology, vol. 5, Issue 6, November 2016. www.ijiset.com;
5. Yasha Diasamidze, Omar Givradze And Alexander Bakuridze Generated Sets of The Complete Semigroup Binary Relations Defined By Semilattices of The $\Sigma_1(X,3)$. International Journal of Innovative Science Engineering and Technology, vol. 5, issue 6, November 2016. www.ijiset.com;

ᲑᲐᲗᲣᲛᲘᲡ ᲨᲝᲗᲐ ᲠᲣᲡᲗᲐᲕᲔᲚᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘ

ᲤᲘᲖᲘᲙᲐ-ᲛᲐᲗᲔᲛᲐᲢᲘᲙᲘᲡᲐ ᲓᲐ ᲙᲝᲛᲞᲘᲣᲢᲔᲠᲣᲚ ᲛᲔᲪᲜᲘᲔᲠᲔᲑᲐᲗᲐ ᲤᲐᲙᲣᲚᲢᲔᲢᲘ

ᲛᲐᲗᲔᲛᲐᲢᲘᲙᲘᲡ ᲓᲔᲞᲐᲠᲢᲐᲛᲔᲜᲢᲘ

ხელნაწერის უფლებით

ალექსანდრე ბაკურიძე

$\Sigma_1(X,2)$, $\Sigma_1(X,3)$ ᲓᲐ $\Sigma_4(X,8)$ ᲙᲚᲐᲡᲘᲡ ᲜᲐᲮᲔᲕᲐᲠᲛᲔᲡᲔᲠᲔᲑᲘᲗ ᲒᲐᲜᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲣᲚᲘ ᲑᲘᲜᲐᲠᲣᲚ ᲛᲘᲛᲐᲠᲗᲔᲑᲐᲗᲐ ᲡᲠᲣᲚᲘ ᲜᲐᲮᲔᲕᲐᲠᲯᲒᲣᲤᲔᲑᲘ

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის

ანოტაცია

სპეციალობა-მათემატიკა

ᲑᲐᲗᲣᲛᲘ
2017

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში.

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

იაშა დიასამიძე
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი,
ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი.

უცხოელი შემფასებლები:

ნური ჩიმენი
პროფესორი, ჩანაქკალეს 18 მარტის უნივერსიტეტი.

ალი ერდოღანი
პროფესორი, ჰაჯეტეპეს უნივერსიტეტი.

შემფასებლები:

მიხეილ ამაღლობელი
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოც. პროფესორი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თენგიზ ბოკელავაძე
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოც. პროფესორი,
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

გულად ფარტენაძე
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოც. პროფესორი,
ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სადისერტაციო ნაშრომის დაცვა შედგება 2017 წლის 23 ივნისს _____ საათზე, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე.

მისამართი: ბათუმი, ნინოშვილის ქ.№35, უნივერსიტეტის პირველი კორპუსი, მესამე სართული, დარბაზი №_____.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში და ვებ-გვერდზე www.bsu.edu.ge

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული მდივანი,
ასოცირებული პროფესორი **დალი მახარაძე**

for some $T, T', Z \in D$, $Z_7 \subset T \subset T' \subset \breve{D}$, $Y_7^\alpha, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$;

e) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{T' \cup Z}^\alpha \times (T' \cup Z))$ for some $' \in$, $\subset$ $'$, $\subset$, $'$ $\neq \varnothing$, $' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$;

f) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ for some $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, which satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$.

g) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ for some $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$ which satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$.

h) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ for some $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$ which satisfies the conditions: ${}^\alpha \supseteq \varphi(\quad)$, ${}^\alpha \cup {}^\alpha \supseteq \varphi(\quad)$, ${}^\alpha \cup {}^\alpha \supseteq \varphi(\quad)$, ${}^\alpha \cup {}^\alpha \cup {}^\alpha \supseteq \varphi(\quad)$, ${}^\alpha \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$, ${}^\alpha \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$, ${}^\alpha \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$.

Theorem 3.3.2. Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$. Then the set R_D of all regular elements of the semigroup $B_X(D)$ is a subsemigroup of this semigroup.

APROVEMENT OF THE RESULTS OF THE THESIS

The main theoretical findings and results are presented in the scientific publications in Georgian, as well as foreign international scientific journals.

The approbation of the thesis was held in Batumi Shota Rustaveli State University at the broad session of the department of Mathematics, in which it was approved and recommended for the defense.

$V[\alpha]=V\left(X^*,\alpha\right)$, if $\varnothing\in V\left(X^*,\alpha\right)$,

$V[\alpha]=V\left(X^*,\alpha\right)\cup\{\varnothing\}$, if $\varnothing\notin V\left(X^*,\alpha\right)$ და $\varnothing\in D$,

then it obviously follows that any binary relation α of the semigroup $B_X(D)$ can always be represented in the form $\alpha=\bigcup\limits_{T\in V[\alpha]}\left(Y_T^\alpha\times T\right)$.

In the sequel we will call such a representation of a binary relation α quasinormal.

Note that for a quasinormal representation of a binary relation α, it is not all sets Y_T^α that may differ from an empty set. But for such a representation the following conditions are always fulfilled:

a) $Y_T^\alpha\cap Y_{T'}^\alpha=\varnothing$ for any $T,T'\in D$ and $T\neq T'$;

b) $X=\bigcup\limits_{T\in V[\alpha]}Y_T^\alpha$

(see [1], 1.11).

Theorem 3.3.1. Let $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$. Then a binary relation α of the semigroup $B_X(D)$ with a quasinormal representation in one of the forms given below is a regular element of this semigroup iff there exists a complete $\alpha-$isomorphism φ of the semilattice $V(D,\alpha)$ on some subsemilattice D' of the semilattice D that satisfies at least one of the following conditions:

a) $\alpha=X\times T$ for some $T\in D$;

b) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$ for some $T,T'\in D$, $T\subset T'$ and $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, which satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

c) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$ for some $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, and $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, which satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

d) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$

თემის აქტუალობა

ნახევარჯგუფი არის არაცარიელი სიმრავლე, მასში განსაზღვრული ბინარული ალგებრული ასოციაციური ოპერაციის მიმართ. როგორც ფელიქს კლეინი მიუთითებს, იმ პერიოდში, როდესაც ჯგუფთა თეორია ყალიბდებოდა, იყო ვარაუდი, რომ ძირითად საწყის ცნებად აღებულიყო ის, რასაც დღეს ნახევარჯგუფს ვუწოდებთ. თუმცა მათემატიკის განვითარების იმ ეტაპზე გადაწყვიტეს შეჩერებულიყვნენ შემდეგ ცნებაზე - ჯგუფებზე.

ნახევარჯგუფთა თეორიაში მნიშვნელოვანი შედეგებისა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფებთანაა დაკავშირებული.

ბინარულ მიმართებათა ენა გამოსაყენებლად მოსახერხებელია მათემატიკურ ლინგვისტიკაში, მათემატიკურ ბიოლოგიაში და გამოყენებითი მათემატიკის სხვადასხვა დარგებში, მაგალითად, ბინარულ მიმართებათა თეორიას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს ავტომატთა თეორიაში. კერძოდ, ყოველი სასრული უნივერსალური ავტომატი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას როგორც მონიშნული ორიენტირებული გრაფი, რომელსაც მდგომარეობის დიაგრამა ეწოდება.

ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის შესწავლის სირთულე არის ის, რომ ისინი როგორც წესი არ წარმოადგენენ რეგულარულ ნახევარჯგუფებს, რაც აძნელებს მათ შესწავლას. ამასთან დაკავშირებით მეტად საინტერესო აღმოჩნდა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფებისა და მათი ზოგიერთი მნიშვნელოვანი კლასების სისტემატური შესწავლა გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერების გამოყენებით, რომელიც პირველად გამოყენებული იქნა იაშა დიასამიძის მიერ თავის სადისერტაციო ნაშრომში. ეს არის ახალი მიმართულება, რომელსაცმიძღვნილი აქვს ცალკე მონოგრაფია. მოკლედ აღვწეროთ ეს მეთოდი:

კერძოდ, D სიმბოლოთი აღვნიშნოთარაცარიელი X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი არაცარიელი სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია D სიმრავლის ელემენტების თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციის მიმართ. მას გაერთიანე-

ბათა სრული $X-$ნახევარმესერი ეწოდება. f იყოს X სიმრავლის D სიმრავლეში ნებისმიერი ასახვა. ყოველ ასეთ f ასახვას შევუსაბამოთ $\alpha_f=\bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$ ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე. ყველა ასეთი α_f $(f:X\to D)$ ბინარული მიმართებების სიმრავლე აღვნიშნოთ $B_X(D)$ სიმბოლოთი. მტკიცდება, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფია. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი ეწოდება.

ვთქვათ, D არის m სიმძლავრის გაერთიანების სრული X - ნახევარმესერი, $B_X(D)$ არის D გაერთიანების სრული X -ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ბევრი აბსტრაქტული თვისება D ნახევარმესერთან მჭიდროდაა დაკავშირებული.

გაერთიანების სრული X - ნახევარმესერი, რომელსაც ფიქსირებული დიაგრამა გააჩნია და ცარიელ სიმრავლეს შეიცავს, ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების ისეთ განსაზღვრულ კლასს განსაზღვრავს, რომ მასში მოცემულ ნახევარჯგუფთან ერთად მის იზომორფულ ნებისმიერ ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფს ყოველთვის შეიცავს. ამ კლასის ნახევარჯგუფთა თვისებები მჭიდროდაა დაკავშირებული იმ ნახევარმესერთა ელემენტების თვისებებზე, რომლებიც მოცემულ ნახევარჯგუფს განსაზღვრავენ. ეს თვისებებია: იკვეთებიან თუ არა მოცემული ნახევარმესერის წარმომქმნელი სიმრავლის ელემენტები; მათი ელემენტები ქმნიან თუ არა ჯაჭვს და ა.შ.

შრომის მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის **ძირითადი მიზანია** $\Sigma_1(X,2)$ და $\Sigma_1(X,3)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებითგანსაზღვრულიბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფებისწარმომქმნელი სისტემების შესწავლა, ამასთანავე

For the complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_4(X,8)$ the following statements (see [7, 8])are well known.

Lemma 3.3.1. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. Then the following sets exhaust all $XI-$ subsemilattices of the semilattice D:

1) $\{Z_7\},\{Z_6\},\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}$ (see diagram 1 in Fig. 2.3.1);

2) $\{Z_7,Z_6\},\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_3\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3\},\{Z_6,Z_1\},$ $\{Z_6,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},$ $\{Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 2 in Fig. 2.3.1);

3) $\{Z_7,Z_6,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3\},$ $\{Z_7,Z_6,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 3 in Fig. 2.3.1);

4) $\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 4 in Fig. 2);

5) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 5 in Fig. 2.3.1);

6) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 6 in Fig. 2.3.1);

7) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 7 in Fig. 2.3.1);

8) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 8 in Fig. 2.3.1).

Fig. 2.3.1 gives the diagrams of all $XI-$ subsemilattices of D.

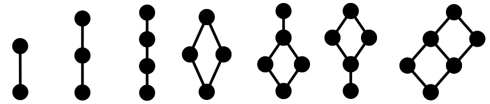


Fig. 2.3.1

Definition 3.3.1. Let D be an arbitrary complete $X-$ semilattice of unions, $\alpha\in B_X(D)$ and $Y_T^\alpha=\{x\in X\mid x\alpha=T\}$. If

$V[\alpha]=V(X^*,\alpha)$, if $\varnothing\notin D$,

Lemma 3.2.14. Assume that $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

If   is a finite set, then

$$\left|R^*(Q_5)\right|=8\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-$$
$$-8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

By the definition of the semilattice D of unions we have

$$Q_6\theta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

Now if

$D_1'=\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$, then $R^*(Q_6)=R(D_1')$ and $\left|R^*(Q_6)\right|=\left|R(D_1')\right|$.

Lemma 3.2.15.let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then

$$\left|R^*(Q_6)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}$$

Lemma 3.2.16. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then

$$\left|R^*(Q_7)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

By the definition of the semilattice D of unions we have

$$Q_8\theta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

Now if $D_1'=\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, then $R^*(Q_8)=R(D_1')$ and $\left|R^*(Q_8)\right|=\left|R(D_1')\right|$.

Lemma 3.2.17. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then

$$\left|R^*(Q_8)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

Theorem 3.2.1. Assume that $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set and is a set of all regular elements of the semigroup $B_X(D)$, then

$$|R_D|=|R^*(Q_1)|+|R^*(Q_2)|+|R^*(Q_3)|+|R^*(Q_4)|+|R^*(Q_5)|+|R^*(Q_6)|+|R^*(Q_7)|+|R^*(Q_8)|.$$

$\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესე-რებითგანსაზღვრულიბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარ-ჯგუფების ისეთი თვისებების შესწავლა,რომლებიც ინახებიან იზომორფიზმის დროს.

კვლევის საგანს წარმოადგენს $\Sigma_1(X,2)$, $\Sigma_1(X,3)$ და $\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერები, აგრეთვე კვლევის საგანს წარმოადგენენ $\Sigma_4(X,8)$ ნახევარმესერებით განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარ-ჯგუფები.

შრომის მეცნიერული სიახლე

ნაშრომში პირველად განიხილება $\Sigma_1(X,2)$ და $\Sigma_1(X,3)$ კლა-სის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვ-რული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების წარმომქმნელი სისტემები, ასევე პირველად განიხილება $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის კლასები, მოცე-მული კლასის ნახევარმესერების თვისებები გამოკვლეულია შესაბამისი დიაგრამის მიხედვით.

სასრულო X სიმრავლის შემთხვევაში, გამოყვანილია $\Sigma_4(X,8)$ კლასში ნახევარმესერების რაოდენობის დათვლის ფორ-მულა, აღწერილია მოცემული კლასის ყველა ქვენახევარ-მესერები და ამასთანავე მათგან გამოყოფილია $XI-$ქვე-ნახევარმესერები. შესწავლილია $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ყოველი D ნა-ხევარმესერით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური, რეგულარული ელემენტები და მათი თვი-სებები. იმ შემთხვევაში როცა X სასრული სიმრავლეა, გამოყ-ვანილია იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტების რაოდენობის დათვლის ფორმულები.

მოცემული საკითხების შესწავლა მთლიანად ეყრდნობა გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერის ძირითად თვისე-

ბებს. ნაშრომში მიღებულმა შედეგებმა მოგვცა იმის საშუალება, რომ ვისაუბროთ ამ ნახევარჯგუფის უამრავ თვისებაზე. კერძოდ, აქვს თუ არა მას მარჯვენა ერთეულები, როგორ არის აგებული მისი იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები. ეს შესაძლებელია მოცემული ნახევარჯგუფის განმსაზღვრელი ნახევარმესერის შესაბამის დიაგრამაზე დაყრდნობით.

გამოკვლევის ძირითადი მეთოდები

ცნობილია, რომ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები, ცალმხრივი ერთეულები, რეგულარული ელემენტები, მაქსიმალური ქვეჯგუფები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ნახევარჯგუფთა აბსტრაქტული თვისებების (ე.ი., ისეთი თვისებების, რომლებიც ინახებიან იზომორფიზმის დროს), შესწავლაში.

სადისერტაციო ნაშრომში ნახევარჯგუფთა თვისებების შესწავლა ხდება ნახევარმესერთა თვისებების საშუალებით. ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების მნიშვნელოვანი ნაწილი ძირითადად განისაზღვრება იმ გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებით, რომლებიც განსაზღვრავენ მოცემული კლასის ელემენტებს.

ნაშრომში გამოიყენება მესერთა თეორიის, ნახევარჯგუფთა თეორიის, სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ზოგადი მეთოდი.

ნაშრომის პრაქტიკული და თეორიული ღირებულება

სადისერტაციო ნაშრომი ატარებს ძირითადად თეორიულ ხასიათს. ნაშრომში მიღებული შედეგები შეიძლება შემდგომ გამოყენებული იქნას ნახევარჯგუფთა და ნახევარმესერთა გამოკვლევებში.

დისერტაციის სტრუქტურა და მოცულობა

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, 3 თავის, ამ თავებში შემავალი 8 პარაგრაფისა და 4 დანართისაგან. ნაშრომის საერთო მოცულობა არის კომპიუტერით დაკაბადონებული 202 გვერდი(მათგან 143 გვერდი ნაშრომის ძირითადი ნაწილია, დანარჩენი კი დამატებები).

$$Q_5\theta_{XI}=\left\{\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\right\}$$

Now if

$$D_1'=\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},D_2'=\{Z_7,Z_4,Z_6,Z_1\},D_3'=\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},D_4'=\{Z_7,Z_3,Z_4,\breve{D}\},$$
$$D_5'=\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\},D_6'=\{Z_7,Z_1,Z_3,\breve{D}\},D_7'=\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},D_8'=\{Z_6,Z_1,Z_3,\breve{D}\},.$$

Then by we obtain

$$R^*(Q_5)=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4')\cup$$
$$\cup R(D_5')\cup R(D_6')\cup R(D_7')\cup R(D_8').$$

Lemma 3.2.11. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. Then the following equality is valid:

$$\left|R^*(Q_5)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|+\left|R(D_5')\right|+\left|R(D_6')\right|-$$
$$-\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_3')\right|-\left|R(D_3')\cap R(D_6')\right|-$$
$$-\left|R(D_4')\cap R(D_5')\right|.$$

Lemma 3.2.12. Assume that $D'=\{Z_7,Y,Y',Y\cup Y'\}$ and $D''=\{Z_7,Y_1,Y_1',Y_1\cup Y_1'\}$ are elements of the set $\{D_1',D_2',D_3',D_4',D_5',D_6'\}$ such that $' \neq\ ''$, $\supseteq$, $'\supseteq\ '$ and a quasinormal representation of the binary relation α of the semigroup $B_X(D)$ has the form

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times(T'\cup T'')\right)$$

Where $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$.Then $\alpha\in\ (\ ')\cap\ (\ '')$ if and only if

$$Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Y_1',\ Y_{T'}^\alpha\cap Y\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Y'\neq\varnothing.$$

Lemma 3.2.13. Assume that $D'=\{Z_7,Y,Y',Y\cup Y'\}$ and $D''=\{Z_7,Y_1,Y_1',Y_1\cup Y_1'\}$ are elements of the set $\{D_1',D_2',D_3',D_4',D_5',D_6'\}$ such that $'\neq\ ''$, $\supseteq$, $'\supseteq\ '$ if X is α finite set. Then following equalities are valid:

$$|\ (\ ')\cap\ (\ '')|=\ \cdot|\ \ |\cdot(|\ \ |-\ )\cdot(|\ \ |-\ )\cdot|\ \ |$$
$$|\ (\ ')\cap\ (\ ')|=\ \cdot(|\ \ |-\ )\cdot|\ \ |\cdot(|\ \ |-\ )\cdot|\ \ |$$
$$|\ (\ ')\cap\ (\ ')|=\ \cdot(|\ \ |-\ )\cdot(|\ \ |-\ )\cdot|\ \ |$$
$$|\ (\ ')\cap\ (\ ')|=\ \cdot(|\ \ |-\ )\cdot(|\ \ |-\ )\cdot|\ \ |$$

for some $\in$, $\subset \subset \breve{}$ and $\alpha \quad \alpha \quad \alpha \notin \{\varnothing\}$, then
$\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ if and only if

$$^{\alpha} \supseteq \quad ^{\alpha} \cup \; ^{\alpha} \supseteq \; ' \quad ^{\alpha} \cap \; ' \neq \varnothing \quad ^{\alpha} \cap \; \breve{} \neq \varnothing$$

Lemma 3.2.7. Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then the following equalities are valid:

$$\left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| = 11 \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_6|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|},$$
$$\left|R(D_1') \cap R(D_4')\right| = 11 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_6|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|},$$
$$\left|R(D_2') \cap R(D_4')\right| = 11 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

Lemma 3.2.8. Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_3)\right| = {} & 11 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_6|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_6|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 11 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ & + 11 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 11 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ & + 11 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 11 \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_6|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\ & - 11 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_6|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 11 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}.\end{aligned}$$

By the definition of a semilattice of unions we have

$$Q_4\theta_{XI} = \left\{\{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}\right\}$$

Now, if

$$D_1' = \{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\},\ D_2' = \{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\},\ D_3' = \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}$$

Then by we obtain

$$R^*(Q_4) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3')$$

Lemma 3.2.9. let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$.
Then $|R^*(Q_4)| = |R(D_1')| + |R(D_2')| + |R(D_3')|$.

Lemma 3.2.10. Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then

$$\begin{aligned}|R^*(Q_4)| = {} & 3 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ & + 3 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ & + 3 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}.\end{aligned}$$

By the definition of a semilattice of unions we have

I-თავი

$\Sigma_1(X,2)$ და $\Sigma_1(X,3)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების წარმომქმნელი სისტემები

მოცემულ ნაშრომში განხილულია $\Sigma_1(X,2)$ და $\Sigma_1(X,3)$ კლასების D გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების წარმომქმნელი სისტემები.

თეორემა 1.1.1 *ვთქვათ,* $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, ..., Z_{m-1}\}$ *ნებისმიერი გაერთიანებათა სრული* $X-$ *ნახევარმესერია და* $C(D) = \{P_0, P_1, P_2, ..., P_{m-1}\}$ *არის* X *სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ქვესიმრავლეთა რაღაც ოჯახი (ცარიელი* $\varnothing$ *სიმრავლე შეიძლება რამდენჯერმე განმეორდეს). თუ* φ *არის ასახვა* D *ნახევარმესერისა სიმრავლეთა* $C(D)$ *ოჯახზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{m-1} \\ P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{m-1} \end{pmatrix}$$

და $\hat{D}_Z = D \setminus D_T$, *მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:*

$$\begin{aligned}\breve{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{m-1} \\ Z_i &= P_0 \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_{Z_i}} \varphi(T)\end{aligned} \qquad \textit{(1.1.1)}$$

შემდეგში ამ ტოლობებს ვუწოდებთ ფორმალურ ტოლობებს.

დამტკიცებულია, რომ თუ D ნახევარმესერის ელემენტები წარმოდგენილია (1.1.1) სახით, მაშინ P_i $(0 < i \le m-1)$ სიმრავლეებს შორის არსებობს ისეთი, რომელიც ვერ იქნება D-თვის ცარიელი სიმრავლე. ასეთ P_i სიმრავლეს ეწოდება ბაზისური წყარო, ამავე დროს ისეთ P_j $(0 \le j \le m-1)$ სიმრავლეს, რომელიც შეიძლება იყოს

ცარიელი სიმრავლე, ეწოდება სისავსის წყარო. დამტკიცებულია, რომ φ ასახვისას ბაზისურ წყაროს დამფარავ ელემენტთა რაოდენობა ყოველთვის ერთის ტოლია, ხოლო სისავსის წყაროს დამფარავი ელემენტები ან არ არსებობენ, ან მათი რაოდენობა მეტია 1-ზე (იხ [1],თავი 11).

ვთქვათ, $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ იყოს ფორმალური ტოლობების პარამეტრები, $\beta \in B_X(D)$ და

$$\overline{\beta} = \bigcup_{i=0}^{m-1}\left(P_i \times \bigcup_{t \in P_i} t\beta\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times t'\beta\right).$$

$\overline{\beta}$ მიმართებას ეწოდება β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენა.

თუ $\overline{\beta}$ არის β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენა, მაშინ $\overline{\beta}$ ბინარული მიმართებისთვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) $\overline{\beta} \in B_X(D)$;

b) $\beta \subseteq \overline{\beta}$;

c) β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენა არის კვაზინორმალური;

d) თუ

$$\overline{\beta}_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \ldots & P_{m-1} \\ P_0\overline{\beta} & P_1\overline{\beta} & \ldots & P_{m-1}\overline{\beta} \end{pmatrix},$$

მაშინ $\overline{\beta}_1$ არის ასახვა $C(D) = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}\}$ სიმრავლეთა ოჯახისა $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{m-1}\} \cup \{\varnothing\}$ სისტემაზე;

e) თუ $\overline{\beta}_2 : X \setminus \breve{D} \to D$ არის ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\overline{\beta}_2(t') = t'\beta$ ყოველი $t' \in X \setminus \breve{D}$ -თვის, მაშინ

$$\overline{\beta} = \bigcup_{i=0}^{m-1}\left(P_i \times \bigcup_{t \in P_i} t\beta\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\beta}_2(t')\right).$$

შევნიშნოთ, რომ თუ P_j $(0 \le j \le m-1)$ არიან ისეთი სისავსის წყაროები, რომ $P_j = \varnothing$, მაშინ ყოველთვის სრულდება ტოლობა

$$D'_1 = \{Z_7, \breve{D}\},\ D'_2 = \{Z_5, \breve{D}\},\ D'_3 = \{Z_2, \breve{D}\},\ D'_4 = \{Z_1, \breve{D}\},\ D'_5 = \{Z_7, Z_6\},$$
$$D'_6 = \{Z_7, Z_4\},\ D'_7 = \{Z_7, Z_3\},\ D'_8 = \{Z_7, Z_1\},\ D'_9 = \{Z_6, Z_3\},\ D'_{10} = \{Z_6, Z_1\},$$
$$D'_{11} = \{Z_6, \breve{D}\},\ D'_{12} = \{Z_5, Z_1\},\ D'_{13} = \{Z_4, Z_1\},\ D'_{14} = \{Z_4, \breve{D}\},\ D'_{15} = \{Z_3, \breve{D}\}.$$

Then from we obtain

$$\begin{aligned} R^*(Q_2) = {} & R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \cup R(D'_5) \cup R(D'_6) \cup \\ & \cup R(D'_7) \cup R(D'_8) \cup R(D'_9) \cup R(D'_{10}) \cup R(D'_{11}) \cup R(D'_{12}) \cup \\ & \cup R(D'_{13}) \cup R(D'_{14}) \cup R(D'_{15}) \end{aligned}$$

Lemma 3.2.3. Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$. Then $|R^*(Q_2)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| - |R(D'_4)|$

Lemma 3.2.4.Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$. If

is a finite set, then

$$|R^*(Q_2)| = 15 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_7|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_5|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}$$

According to the definition of the semilattice D we have

$$\begin{aligned} Q_3\theta_{XI} = \{ & \{Z_7, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \\ & \{Z_7, Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \\ & \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}\}. \end{aligned}$$

Now, if

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, \breve{D}\},\ D'_2 = \{Z_7, Z_4, \breve{D}\},\ D'_3 = \{Z_7, Z_3, \breve{D}\},\ D'_4 = \{Z_7, Z_1, \breve{D}\},$$
$$D'_5 = \{Z_5, Z_1, \breve{D}\},\ D'_6 = \{Z_7, Z_6, Z_3\},\ D'_7 = \{Z_7, Z_4, Z_1\},\ D'_8 = \{Z_7, Z_6, Z_1\},$$
$$D'_9 = \{Z_6, Z_1, \breve{D}\}, D'_{10} = \{Z_6, Z_3, \breve{D}\},\ D'_{11} = \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}.$$

then by we obtain

$$\begin{aligned} R^*(Q_3) = {} & R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \cup R(D'_5) \cup R(D'_6) \cup \\ & \cup R(D'_7) \cup R(D'_8) \cup R(D'_9) \cup R(D'_{10}) \cup R(D'_{11}). \end{aligned}$$

Lemma 3.2.5. Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$. Then

$$\begin{aligned} |R^*(Q_3)| = {} & |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| + |R(D'_4)| + |R(D'_5)| - \\ & - |R(D'_1) \cap R(D'_3)| - |R(D'_1) \cap R(D'_4)| - |R(D'_2) \cap R(D'_4)|. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.6. $' = \{ \quad ' \ \breve{} \}$ and $'' = \{ \quad ' \ \breve{} \}$, where $' \supseteq \ '$.

If a quasinormal representation of the binary relation α of the semigroup ( ) has the form $\alpha = (\ ^{\alpha} \times \ ) \cup (\ ^{\alpha} \times \ ) \cup (\ ^{\alpha} \times \breve{} \ )$, Let further, $D, D' \in \Sigma'(X, D)$ and $\vartheta_{XI} \subseteq \Sigma'_{XI}(X, D) \times \Sigma'_{XI}(X, D)$. It is assumed that $D\vartheta_{XI}D'$ if and only if there exist some complete isomorphism φ between the semilatices D and D'. One can easily verify that the binary relation ϑ_{XI} is an equivalence relation on the set $\Sigma'_{XI}(X, D)$.

Let the by symbol $Q_i\vartheta_{Xi}$ denote the ϑ_{XI} – class of equivalence ϑ_{XI} of the set $\Sigma'_{XI}(X, D)$, whore every element is isomorphic to the X – semilattice Q_i and

$$R^*(Q_i) = \bigcup_{D' \in Q_i\vartheta_{XI}} R(D')$$

Lemma 3.2.1. If $|\Omega(Q)| = m_0$, then the following propositions are valid:

(a) $|\ (\ )| =$;()

(b) $|\ (\ )| = \cdot(\ \ - \ )\cdot$;

(c) $|\ (\ )| = \cdot(\ \ - \ )\cdot(\ \ - \ \ )\cdot$;

(d) $|\ (\ )| = \cdot(\ \ - \ )\cdot(\ \ - \ \ )\cdot(\ \ - \ \ )\cdot$;

(e) $|\ (\ )| = \cdot \ \cdot(\ \ - \ )\cdot(\ \ - \ )\cdot$;

(f) $|\ (\ )| = \cdot \ \cdot(\ \ - \ )\cdot(\ \ - \ )\cdot(\ \ - \ \ )\cdot$;

(g) $|\ (\ )| = \cdot \ \cdot(\ \ - \ )\cdot \ \cdot(\ \ - \ \ )\cdot(\ \ - \ \ )\cdot$;

(h) $|\ (\ )| = \cdot(\ \ - \ )\cdot(\ \ - \ )\cdot(\ \ - \ \ )\cdot$.

Lemma 3.2.2. Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$. If is a finite set, then

$$|\ {}^*(\ )| =$$

By the definition of the semilattice we have

$$Q_2\theta_{XI} = \{\{Z_7, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1\}, \{Z_2, \breve{D}\}, \{Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_3\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \breve{D}\}, \{Z_5, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \breve{D}\}, \{Z_3, \breve{D}\}\}.$$

Now if

$P_j\bar{\beta} = \varnothing$. ასევე არსებობს ისეთი ბაზისური წყაროები P_i $(0 \le i \le m-1)$, რომლისთვისაც $\bigcup_{t \in P_i} t\beta = \varnothing$, ე.ი. $P_i\bar{\beta} = \varnothing$.

თეორემა 1.1.2 *ვთქვათ* $\alpha, \beta \in B_X(D)$, *მაშინ* $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \bar{\beta}$.

ლემა 1.1.1 *ვთქვათ,* $D = \{Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$, $B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$.

თუ $B \ne \varnothing$, *მაშინ* B *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლე.*

შედეგი 1.1.1 *ვთქვათ,* $D = \{\varnothing, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$ *და* $B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$.

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1) *თუ* $|X \setminus \breve{D}| \ge 1$ *და* $Z_1 = \varnothing$, *მაშინ* $\alpha = X \times D$ *არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

2) *თუ* $X = \breve{D}$ *და* $Z_1 \ne \varnothing$, *მაშინ* $\alpha = X \times Z_1$ *არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

3) *თუ* $X = \breve{D}$ *და* $Z_1 = \varnothing$, *მაშინ* $\alpha = \varnothing$ *და* $\alpha = X \times \breve{D}$ *არ წარმოიქმნებიან* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

თეორემა 1.1.3 *ვთქვათ,* $D = \{Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$. *თუ*

$$B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\},$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) *თუ* $|X \setminus \breve{D}| \ge 1$ *და* $Z_1 \ne \varnothing$, *მაშინ* B *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელი სიმრავლე;*

b) *თუ* $|X \setminus \breve{D}| \ge 1$ *და* $Z_1 = \varnothing$, *მაშინ* $B \cup \{X \times \breve{D}\}$ *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელი სიმრავლე;*

c) *თუ* $X = \breve{D}$ *და* $Z_1 \ne \varnothing$, *მაშინ* $B \cup \{X \times Z_1\}$ *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელი სიმრავლე;*

d) *თუ* $X = \breve{D}$ *და* $Z_1 = \varnothing$, *მაშინ* $B \cup \{\varnothing, X \times \breve{D}\}$ *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელი სიმრავლე.*

შედეგი 1.1.2 *ვთქვათ,* X *სასრული სიმრავლეა,* $D = \{Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$. *მაშინ* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან* B' *წარმომქმნელთა სიმ-*

რავლის ელემენტთა რაოდენობისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) *თუ* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$ *და* $Z_1 \neq \varnothing$, *მაშინ* $\left|B'\right| = 2^{|X|} - 2$;

b) *თუ* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$ *და* $Z_1 = \varnothing$ *ან* $X = \breve{D}$ *და* $Z_1 \neq \varnothing$,

მაშინ $\left|B'\right| = 2^{|X|} - 1$;

d) *თუ* $X = \breve{D}$ *და* $Z_1 = \varnothing$, *მაშინ* $\left|B'\right| = 2^{|X|}$.

განმარტება1.2.1.შემდეგში $\bar{\beta}_1$ და $\bar{\beta}_2$ ელემენტებს ეწოდებათ $\bar{\beta} \in B_X(D)$ ბინარული მიმართების ნორმალური და დამატებითი ასახვები.

თეორემა1.2.1 ვთქვათ, X სასრულო სიმრავლეა და $\alpha, \beta \in B_X(D)$, მაშინ ნებისმიერი β ბინარული მიმართების $\bar{\beta}$ ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენისათვის სრულდება $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \bar{\beta}$ ტოლობა (იხ. წინადადება3.0.1).

თეორემა 1.2.2.ვთქვათ, $\tilde{B}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი წარმომქმნელთა სისტემა. თუ ნებისმიერი α და δ -თვის, აღებული $\tilde{B}$ სიმრავლიდან და $\beta \in \tilde{B}$ ბინარული მიმართების $\bar{\beta} \in B_X(D)$ ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენისათვის სრულდება უტოლობა $\alpha \neq \delta \circ \bar{\beta}$, მაშინ $\alpha \neq \delta \circ \beta$ პირობა ასევე სამართლიანია.

თეორემა 1.2.3. ვთქვათ, $D = \left\{Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_1(X, 3)$ და $Z_2 \neq \varnothing$. თუ $E_X^{(r)}(D)$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულის სიმრავლე,

$$\sigma_1 = (Z_2 \times Z_2) \cup ((X \setminus Z_2) \times Z_1),\ \sigma_2 = (Z_2 \times Z_2) \cup ((X \setminus Z_2) \times \breve{D}),$$
$$\sigma_3 = (Z_1 \times Z_2) \cup ((X \setminus Z_1) \times \breve{D}),\ \sigma_4 = (Z_1 \times Z_1) \cup ((X \setminus Z_1) \times \breve{D})$$

და $B' = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$, *მაშინ* $B = E_X^{(r)}(D) \cup B'$ *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სისტემა.*

შემდეგში იგულისხმება, რომ $Z_2 = \varnothing$.

for some $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$.

(g) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$

for some $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$

(h) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,

for some $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $\ ^\alpha \supseteq \varphi(\quad)$, $\ ^\alpha \cup \ ^\alpha \supseteq \varphi(\quad)$, $\ ^\alpha \cup \ ^\alpha \supseteq \varphi(\quad)$, $\ ^\alpha \cup \ ^\alpha \cup \ ^\alpha \supseteq \varphi(\quad)$, $\ ^\alpha \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$, $\ ^\alpha \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$, $\ ^\alpha \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$.

Now assume that $D \in \Sigma_4(X, 8)$. We introduce the following notation:

(1) $= \{\ \}$, where $\in$;

(2) $= \{\quad '\}$, where $' \in$ and $\subset\ '$;

(3) $= \{\quad '\quad ''\}$, where $'\quad '' \in$ and $\subset\ ' \subset\ ''$;

(4) $= \{\quad '\ \breve{}\}$, where $' \in$ and $\subset\ \subset\ ' \subset\ \breve{}$;

(5) $= \{\quad '\quad ' \cup\ \}$, where $'\ \in\ ,\ \subset\ ',\ \subset\ ,\ '\ \neq \varnothing$, and $' \neq \varnothing$;

(6) $= \{\quad \breve{}\}$;

(7) $Q_7 = \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$;

(8) $= \{\quad \breve{}\}$.

Denote by the symbol $\Sigma(Q_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ the set of all $XI-$ subsemilattices of the semilattices D isomorphic to Q_i. Assume that $D' \in \Sigma(Q_i)$ and denote by the symbol $R(D')$ the set of all regular elements α of the semigroup $B_X(D')$, for which the semilattices $V(D, \alpha)$ and Q_i are mutually $\alpha-$ isomorphic and $V(D, \alpha) = Q_i$.

Let the symbol $\Sigma'_{XI}(X, D)$ denote a set of all $XI-$ subsemilatices of the semilattice D.

semilattice D of the class $\Sigma_4(X,8)$ are subsemigroups of this semigroup.

Definition 3.1.1 We call an element α taken from the semigroup $B_X(D)$ a regular element of the semigroup $B_X(D)$ if in $B_X(D)$ there axsists an element β such thet $\alpha\circ\beta\circ\alpha=\alpha$..

Theorem 3.1.1 Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. Then a binary relation α from the semigroup whose quasonormal representation has the from $\alpha=\bigcup\limits_{\in(\quad\alpha)}(\quad^{\alpha}\times\quad)$ will be a regular element of this semigroup if and only if there exists a complete φ $\alpha-$isomorphism from the semilattice $V(D,\alpha)$ to some subsemilattice D' of the semilattice D which satisfies one of the following conditions:

(a) $\alpha=X\times T$, for some element $T\in D$

(b) $\alpha=(Y_T^{\alpha}\times T)\cup(Y_{T'}^{\alpha}\times T')$, for some $T,T'\in D$, $T\subset T'$,

$Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^{\alpha}\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

(c) $\alpha=(Y_T^{\alpha}\times T)\cup(Y_{T'}^{\alpha}\times T')\cup(Y_{T''}^{\alpha}\times T'')$,

for some $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha},Y_{T''}^{\alpha},\notin\{\varnothing\}$,

$Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T'}^{\alpha}\cap\varphi(T')\neq\varnothing$, $Y_{T''}^{\alpha}\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$

(d) $\alpha=(Y_7^{\alpha}\times Z_7)\cup(Y_T^{\alpha}\times T)\cup(Y_{T'}^{\alpha}\times T')\cup(Y_0^{\alpha}\times\breve{D})$,

for some $T,T',Z\in D$, $Z_7\subset T\subset T'\subset\breve{D}$, $Y_7^{\alpha},Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha},Y_0^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$,

$Y_7^{\alpha}\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_7^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_7^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq\varphi(T')$,

$Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_{T'}^{\alpha}\cap\varphi(T')\neq\varnothing$, $Y_0^{\alpha}\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$;

(e) $\alpha=(Y_T^{\alpha}\times T)\cup(Y_{T'}^{\alpha}\times T')\cup(Y_Z^{\alpha}\times Z)\cup(Y_{T'\cup Z}^{\alpha}\times(T'\cup Z))$

for some $\quad'\in\quad,\quad\subset\quad',\quad\subset\quad,\quad'\quad\neq\varnothing,\quad\quad'\neq\varnothing$,

$Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha},Y_Z^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^{\alpha}\cup Y_Z^{\alpha}\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{T'}^{\alpha}\cap\varphi(T')\neq\varnothing$,

$Y_Z^{\alpha}\cap\varphi(Z)\neq\varnothing$;

(f) $\alpha=(Y_7^{\alpha}\times Z_7)\cup(Y_6^{\alpha}\times Z_6)\cup(Y_4^{\alpha}\times Z_4)\cup(Y_1^{\alpha}\times Z_1)\cup(Y_0^{\alpha}\times\breve{D})$

ლემა1.2.1. *ვთქვათ,* $D=\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_1(X,3)$ და $B=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V(X^*,\alpha)=D\}$.
მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) $B\neq\varnothing$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $|X|\geq 3$ *;*

b) $P_0=\cap D=\varnothing$, $P_1=\breve{D}\setminus Z_1$ *და* $P_2=Z_1$ *;*

c) *თუ* $\alpha=\delta\circ\beta$, *ნებისმიერი* $\alpha\in B$ *-თვის და* $\delta,\beta\in B_X(D)$*-თვის, მაშინ* $V(D,\beta)=D$ *;*

d) *თუ* $|X|\geq 3$ *,მაშინ* B *წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლეს.*

ლემა1.2.2.*ვთქვათ,* $|X|\geq 3$ *და* $D=\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_1(X,3)$*,მაშინ სა-მართლიანია შემდეგი დებულებები:*

a) $Z_1\beta=\varnothing$, $\breve{D}\beta=Z_1$ *ყოველი* $\beta\in B$ *-თვისმაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$*;*

b) $Z_1\beta=\breve{D}\beta=Z_1$ *ყოველი* $\beta\in B$ *-თვისმაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$ *;*

c) $Z_1\beta=\breve{D}\beta=\varnothing$ *ყოველი* $\beta\in B$ *-თვისმაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $|X\setminus\breve{D}|\geq 2$ *.*

B_1, B_2 და B_3 სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავ-ლეები:

$$B_1=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,\mathrm{V}(X^*,\alpha)=\{Z_1,\breve{D}\}\},$$
$$B_2=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,\mathrm{V}(X^*,\alpha)=\{\varnothing,\breve{D}\}\},$$
$$B_3=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,\mathrm{V}(X^*,\alpha)=\{\varnothing,Z_1\}\}.$$

B_1, B_2 და B_3 სიმრავლეების განმარტებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $B_1\cap B_2=B_1\cap B_3=B_2\cap B_2=\varnothing$.

ლემა1.2.3.*ვთქვათ,* $|X|\geq 3$, $D=\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_1(X,3)$ *და*

$$B=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V(X^*,\alpha)=D\}.$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები;

a) $B_1 \cup \{X \times Z_1, X \times \breve{D}\}$ *სიმრავლის ელემენტები არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

b) *თუ* $|X \setminus \breve{D}| \le 1$, *მაშინ* $\alpha = \varnothing$ *ელემენტი არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

c) *თუ* $X = \breve{D}$, *მაშინ* B_3 *სიმრავლის ელემენტები არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით.*

ლემა 1.2.4. *ვთქვათ,* $|X| \ge 3$, $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$ *და*

$$B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\},\ \gamma_0 = (Z_1 \times \varnothing) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_1).$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) *თუ* $|X \setminus \breve{D}| \ge 1$, *მაშინ* $B_2 \cup B_3$ *სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნებიან* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

b) *თუ* $X = \breve{D}$, *მაშინ* B_3 *სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნებიან* $B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}$ *სიმრავლის ელემენტებით;*

c) *თუ* $X = \breve{D}$, *მაშინ* B_2 *სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნებიან* $B_1 \cup \{\gamma_0\}$ *სიმრავლის ელემენტებით.*

ლემა 1.2.5. *ვთქვათ,* $|X| \ge 3$, $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$. *თუ* $|X \setminus \breve{D}| \ge 1$, *მაშინ* $B_1' = B \cup B_1$ *წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას.*

ლემა 1.2.6. *ვთქვათ,* $|X| \ge 3$, $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$ *და*

$$B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\},\ B_1 = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = \{Z_1, \breve{D}\}\},$$
$$\gamma_0 = (Z_1 \times \varnothing) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_1).$$

თუ $X = \breve{D}$, *მაშინ* $B_2' = B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}$ *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სისტემა.*

ლემა 1.2.7. *ვთქვათ,* $|X| = 2$, $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$. *მაშინ* $B = \varnothing$ *და* $B_3' = B_1 \cup \{\gamma_0\}$ *სიმრავლე წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას.*

Lemma 2.3.8 $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then the number $|\ ^*(\ )|$ is calculated by the formula

$$|I^*(Q_8)| = \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Theorem 2.3.1 Let $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, is the of all idempotent of the semigroup $B_X(D)$ then

$$|I_D| = |I^*(Q_1)| + |I^*(Q_2)| + |I^*(Q_3)| + |I^*(Q_4)| +$$
$$|I^*(Q_5)| + |I^*(Q_6)| + |I^*(Q_7)| + |I^*(Q_8)|$$

Let us denote by the symbol $G_X(D,\varepsilon)$ a maximal subgroup of the semigroup $B_X(D)$, whose unit is a idempotent binary relation ε of the semigroup $B_X(D)$ and describe maximal subgroups of the semigroup $B_X(D)$ defined by semilattices of the class $D \in \Sigma_4(X,8)$.

Theorem 2.3.2 If $D \in \Sigma_4(X,8)$ then for any idempotent binary relation ε of the semigroup $B_X(D)$ the subgroup $G_X(D,\varepsilon)$ of the semigroup $B_X(D)$ is a group whose order is equal to 2 at most.

Chapter-III
Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_4(X,8)$ and their Calculation

The paper gives a full description of regular elements of the semigroup $B_X(D)$, which are defined by semilattices of the class $\Sigma_4(X,8)$. Formulas are derived, by means of which the number of regular elements of the semigroup is calculated when X is a finite set.

At the same time in this article, we prove that all regular elements R_D of the complete semigroup $B_X(D)$ defined by an $X-$

$$\left|I^*(Q_2)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_6|} + \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}+2^{|Z_3\setminus Z_6|}-2\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|} +$$
$$+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}+2^{|Z_1\setminus Z_6|}+2^{|Z_1\setminus Z_5|}+2^{|Z_1\setminus Z_4|}-4\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|} +$$
$$+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-7\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

Lemma 2.3.3.let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then the number $|\ ^*(\ \ )|$ is calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_3)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|} +$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|} +$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Lemma 2.3.4. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then the number $|\ ^*(\ \ )|$ is calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_4)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Lemma 2.3.5. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then the number $|\ ^*(\ \ )|$ is calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_5)\right| = 2\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Lemma 2.3.6. $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then the number $|\ ^*(\ \ )|$ is calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_6)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}$$

Lemma 2.3.7. $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then the number $|\ ^*(\ \ )|$ is calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_7)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}$$

თეორემა1.2.4. *ვთქვათ,* $|X|\geq 3$, $D=\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_1(X,3)$. *თუ*

$B=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V(X^*,\alpha)=D\}$, $B_1=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V(X^*,\alpha)=\{Z_1,\breve{D}\}\}$,
$\gamma_0=(Z_1\times\varnothing)\cup((X\setminus Z_1)\times Z_1)$.

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) *თუ* $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$, *მაშინ* $B\cup B_1$ *სიმრავლე წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას;*

b) *თუ* $X=\breve{D}$, *მაშინ* $B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}$ *სიმრავლე წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას;*

c) *თუ* $|X|=2$, *მაშინ* $B_1\cup\{\gamma_0\}$ *სიმრავლე წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას.*

თეორემა1.2.5. *ვთქვათ,* $D=\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_1(X,3)$. *თუ* X *სასრული სიმრავლეა და* $|X|=n$, *მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:*

a) *თუ* $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$, *მაშინ* $|B\cup B_1|$ *ელემენტთა რაოდენობა, აღებული* $B\cup B_1$ *სიმრავლიდან, ტოლია*

$$|B\cup B_1|=3^n-2^{n+1}+1;$$

b) *თუ* $|X|\geq 3$, $X=\breve{D}$, $\gamma_0=(Z_1\times\varnothing)\cup((X\setminus Z_1)\times Z_1)$, *მაშინ* $|B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}|$ *ელემენტთა რაოდენობა, აღებული* $B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}$ *სიმრავლიდან, ტოლია*

$$|B\cup B_1\cup\{\gamma_1\}|=3^n-2^{n+1}+2;$$

c) *თუ* $|X|=2$, *მაშინ* $|B_1\cup\{\gamma_1,\gamma_2\}|$ *ელემენტთა რაოდენობა, აღებული* $B_1\cup\{\gamma_0\}$ *სიმრავლიდან, ტოლია* $|B_1\cup\{\gamma_0\}|=3$.

II - თავი

$\Sigma_4(X,8)$ კლასისნახევარმესერებითგანსაზღვრული

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფისიდემპოტენტურიელემენტები

მოცემულთავში გამოყვანილია $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ გაერთიანებათა $X-$ნახევარმესერის ფორმალური ტოლობები. სრულად არის გადმოცემული $\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებით განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, სასრულო X სიმრავლის შემთხვევაში მოცემულია შესაბამისი ნახევარჯგუფების იდემპოტენტურ ელემენტთა რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულები.

ვთქვათ, X არაცარიელი სიმრავლეა, D არის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერი, ე.ი. არის X სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა ისეთი სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია D-ს ელემენტების თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციების მიმართ, f არის ასახვა X სიმრავლისა D-ში. მაშინ ყოველი ასეთი f ასახვისათვის X სიმრავლეზე განისაზღვრება α_f ბინარულიმიმართება, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\alpha_f=\bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right).$$

ყველა ასეთ α_f ბინარულ მიმართებათა სიმრავლე ($f:X\to D$) აღინიშნება $B_X(D)$ სიმბოლოთი. ადვილად მტკიცდება, რომ $B_X(D)$ წარმოადგენს ნახევარჯგუფს ბინარულ მიმართებათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ, რომელსაც ეწოდება D გაერთიანებითა სრული $X-$ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი.

Lemma 2.2.3. The following propositions are true:

) | ( )| = ;

) | ( )| = (| ′ | −) · | |;

) | ( )| = (| ′ | −) · (| ″ | − | ″ |) · | ″|;

) | ( )| = (| | −) · (| ′ | − | ′ |) · (| | − | |) · | |;

) | ( )| = (| ′ | −) · (| | −) · | (′∪)|;

) | ( )| = (| | −) · (| | −) · (| | − | |) · | |;

) | ( )| = (| | −) · |(∩) | · (| | − | |) · (| | − | |) · | |;

h) | ( )| = (| | −) · (| | −) · (| | − | |) · | |.

Assume that the symbol $\Sigma'_{XI}(X,D)$ denotes the set of all $XI-$ subsemilatices of D.

Further let $D,D'\in\Sigma'(X,D)$ and $\vartheta_{XI}\subseteq\Sigma'_{XI}(X,D)\times\Sigma'_{XI}(X,D)$. It is assume that $D\vartheta_{XI}D'$ if and only if there exists some complete isomorphism φ between the semilatices D and D'.One can easiy verify that the binary relation ϑ_{XI} is an equivalence relation on the set $\Sigma'_{XI}(X,D)$.

Let the symbol $Q_i\vartheta_{Xi}$ Denote the $\vartheta_{XI}-$class of equivalence ϑ_{XI} of the set $\Sigma'_{XI}(X,D)$, whose every element is isomorphic to the $X-$ semilattice Q_i $(i=1,2,\ldots,8)$.

We will consider the following cases.

Lemma 2.3.1. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set, then $| \ ^*(\ )| =$

Lemma 2.3.2. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. If is a finite set,then the number $| \ ^*(\ )|$ is calculated by the formula

f) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times \breve{D}\right)$
for some $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_4^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$,

$Y_6^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$.

g) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times \breve{D}\right)$
for some $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_3^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq Z_3$,

$Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_1$, $Y_6^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing$, $Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$.

) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times \breve{D}\right)$,
for some $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_4^\alpha,Y_3^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $^\alpha\supseteq$, $^\alpha\cup{}^\alpha\supseteq$, $^\alpha\cup{}^\alpha\supseteq$,

$^\alpha\cup{}^\alpha\cup{}^\alpha\supseteq$, $^\alpha\cap\ \neq\varnothing$, $^\alpha\cap\ \neq\varnothing$, $^\alpha\cap\ \neq\varnothing$.

Now assume $D\in\Sigma_4(X,8)$ let us introduce the notation:

) $=\{\ \}$, where $\in$;

) $=\{\ \ '\}$, where $'\in$ and $\subset\ '$;

) $=\{\ \ '\ \ ''\}$, where $'\ \ ''\in$ and $\subset\ '\subset\ ''$;

) $=\{\ \ '\ \breve{}\ \}$, where $'\in$ and $\subset\ \subset\ '\subset\ \breve{}$;

) $=\{\ \ '\ \ '\cup\ \}$, where $'\ \in$, $\subset\ '$, $\subset$,
$'\ \neq\varnothing$, and $'\neq\varnothing$;

) $=\{\ \ \breve{}\ \}$;

7) $Q_7=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$;

) $=\{\ \ \breve{}\ \}$.

Let the symbol $\Sigma(Q_i)$ $(i=1,2,\ldots,8)$ denote the set of all $XI-$ subsemilattices of the semilattice D isomorphic to Q_i. Now assume $D'\in\Sigma(Q_i)$ and denote by the symbol $I(D')$ the set of right units of the semigroup $B_X(D')$. Assume that $I^*(Q_i)=\bigcup\limits_{D'\in\Sigma(Q_i)}I(D')$.

Remark.

The set of all right units of the complete semigroup $B_X(D')$ of binary relations defined by the complte $XI-$ semilattice of unions D' will be frequently denoted by the symbol $E_X^{(r)}(D')$. (see. [1]).

$\varnothing$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X სიმრავლის ცარიელი ქვე-სიმრავლე. თუ $(x,y)\in\alpha$, მაშინ ეს ჩაიწერება შემდეგნაირად: $x\alpha y$. ახლა ვთქვათ

$x,y\in X$, $Y\subseteq X$, $\alpha\in B_X(D)$, $T\in D$, $\varnothing\neq D'\subseteq D$, $\breve{D}=\cup D$, $t\in\breve{D}$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$y\alpha=\{x\in X\mid y\alpha x\}$, $Y\alpha=\bigcup\limits_{y\in Y}y\alpha$, $2^X=\{Y\mid Y\subseteq X\}$,

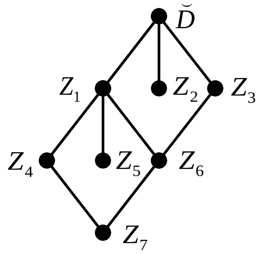
$X^*=2^X\setminus\{\varnothing\}$, $V(D,\alpha)=\{Y\alpha\mid Y\in D\}$, $D'_T=\{T'\in D'\mid T\subseteq T'\}$,

$\ddot{D}'_T=\{T'\in D'\mid T'\subseteq T\}$, $D'_t=\{Z'\in D'\mid t\in Z'\}$, $l(D',T)=\cup(D'\setminus D'_T)$.

$\Lambda(D,D')$ სიმბოლოთი აღინიშნება D ნახევარმესერში D' სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი.

განმარტება 2.1.1. *ვთქვათ,* $\alpha\in B_X(D)$. *თუ* $\alpha\circ\alpha=\alpha$ *ნებისმიერი* $\beta\in B_X(D)$, *მაშინ ბინარულ მიმართებას შესაბამისად ეწოდება* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი.*

ვთქვათ X და $\Sigma_4(X,8)$ შესაბამი სადნების მიერ არაცარიელ სიმრავლეს და გაერთიანებათა $X-$ნახევარმესერთა იმ კლასს წარმოადგენს, რომლის ყოველი ელემენტი $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ გაერთიანებათა $X-$ნახევარ მესრის იზომორფულია, სადაც აკმაყოფილებ სშემდეგ პირობებს:



ნახ. 2.1.1

$$
\begin{gathered}
Z_7\subset Z_4\subset Z_1\subset\breve{D},\\
Z_7\subset Z_6\subset Z_1\subset\breve{D},\\
Z_7\subset Z_6\subset Z_3\subset\breve{D},\\
Z_1\setminus Z_2\neq\varnothing,\ Z_2\setminus Z_1\neq\varnothing,\\
Z_1\setminus Z_3\neq\varnothing,\ Z_3\setminus Z_1\neq\varnothing,\\
Z_2\setminus Z_3\neq\varnothing,\ Z_3\setminus Z_2\neq\varnothing,\\
Z_4\setminus Z_5\neq\varnothing,\ Z_5\setminus Z_4\neq\varnothing,\\
Z_4\setminus Z_6\neq\varnothing,\ Z_6\setminus Z_4\neq\varnothing,\\
Z_5\setminus Z_6\neq\varnothing,\ Z_6\setminus Z_5\neq\varnothing,\\
Z_1\cup Z_2=Z_1\cup Z_3=\breve{D},\\
Z_2\cup Z_3=Z_4\cup Z_2=Z_4\cup\\
Z_3=Z_5\cup Z_2=Z_5\cup Z_3=\breve{D},\\
Z_4\cup Z_5=Z_4\cup Z_6=Z_5\cup Z_6=Z_1.
\end{gathered}
\qquad \ldots(2.1.1)
$$

X – ნახევარმესერი, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1.1) პირობებს, მოცემულია ნახ. 1.1.1-ზე.

დავუშვათ, რომ $C(D)=\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7\}$, სადაც $P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6$ და P_7 არიან X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები და

$$\varphi=\begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ P_7 & P_6 & P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}$$

ასახვაა D გაერთიანებათა X – ნახევარმესერისა $C(D)$ სიმრავლეთა ოჯახზე. მაშინ მოცემულ D ნახევარმესერის ფორმალურ ტოლობებს ექნებათ შემდეგი სახე

$$\begin{aligned}
\breve{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_1 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_2 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_3 &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_4 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_5 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_6 &= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_7,\\
Z_7 &= P_0 \cup P_2 \cup P_5.
\end{aligned}$$

სადაც $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 \notin \{\varnothing\}$ და $|P_0| \geq 0$, $|P_6| \geq 0$ და $|P_7| \geq 0$ ე.ი. P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 ელემენტები ბაზისურ წყაროებს წარმოადგენენ, ხოლო P_0, P_6 და P_7 ელემენტი კი სისავსის წყაროებია. ამიტომაც ბაზისურ წყაროთა რიცხვი $\delta =$, ხოლო $|X| \geq 5$

ლემა 2.1.1 ვთქვათ, $D \in \Sigma_4(X,8)$ და სასრული სიმრავლეა. თუ $|X| = n \geq 5$ და $|\Sigma_4(X,8)| = s$, მაშინ D ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმთა რაოდენობა $q=1$ და

$$s = 9^n - 5\cdot 8^n + 10\cdot 7^n - 10\cdot 6^n + 5\cdot 5^n - 4^n$$

ლემა2.1.2ვთქვათ, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}$ არის $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ ნახევარმესერით განსაზღვრულ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს მარჯვენა ერთეული არგააჩნია.

ვთქვათ, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$.

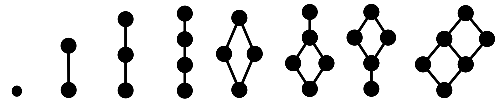
6) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (see Diagram 6 in Figure 1.2.2);

7) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see Diagram 7 in Figure 1.2.2);

8) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see Diagram 8 in Figure 1.2.2);

exhaust all XI – subsemilattices of the semilattice D.

According to the proof of Lemm 2.2, the diagrams of XI – semilattices will have the form of one of the diagrams given in Figure 4.



7

Fig. 1.2.2

Theorem 2.2.1. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. A binary relation α from the semi $B_X(D)$ will be an idempotent element of this semigroup if and only if its quasinormal representation satidfird at least one of the conditions below:

a) $\alpha = X \times T$,

for some element $T \in D$;

b) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$,

for some $T,T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$;

c) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$,

for some $T,T',T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin \{\varnothing\}$ and $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

d) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,

for some $T,T',Z \in D$, $Z_7 \subset T \subset T' \subset \breve{D}$, $Y_7^\alpha, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and

$Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

e) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{T' \cup Z}^\alpha \times (T' \cup Z))$

for some $' \in , \subset ', \subset , ' \neq \varnothing, ' \neq \varnothing$,

$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$;

29) $\left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ (see diagram 29 in Figure 1.2.1);

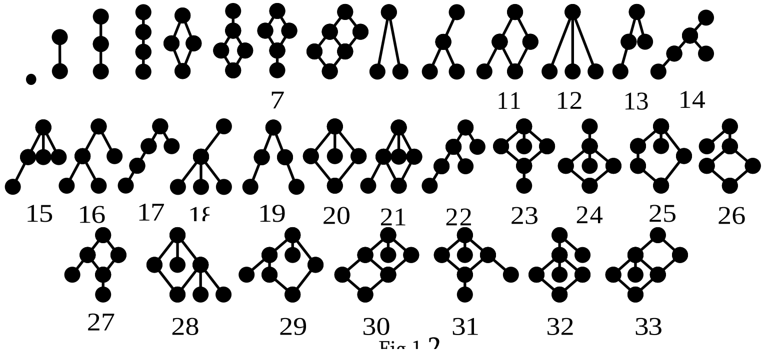
30) $\left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ (see diagram 30in Figure 1.2.1);

31) $\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ (see diagram 31 in Figure 1.2.1);

32) $\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ (see diagram 32 in Figure 1.2.1);

33) $\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$ (see diagram 33 in Figure 1.2.1);

exhaust all subsemilattices of the semilattice D .



Lemma 2.2.2. Let $D=\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_{4,} Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X,8)$. Then subsets of the following form

1) $\left\{Z_7\right\},\left\{Z_6\right\},\left\{Z_5\right\},\left\{Z_4\right\},\left\{Z_3\right\},\left\{Z_2\right\},\left\{Z_1\right\},\left\{\breve{D}\right\}$

(see Diagram 1 in Figure 1.2.2);

2) $\left\{Z_7, Z_6\right\},\left\{Z_7, Z_4\right\},\left\{Z_7, Z_3\right\},\left\{Z_7, Z_1\right\},\left\{Z_7, \breve{D}\right\},\left\{Z_6, Z_3\right\},\left\{Z_6, Z_1\right\},$
$\left\{Z_6, \breve{D}\right\},\left\{Z_5, Z_1\right\},\left\{Z_5, \breve{D}\right\},\left\{Z_4, Z_1\right\},\left\{Z_4, \breve{D}\right\},\left\{Z_3, \breve{D}\right\},\left\{Z_2, \breve{D}\right\},\left\{Z_1, \breve{D}\right\}$

(see Diagram 2 in Figure 1.2.2);

3) $\left\{Z_7, Z_6, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_4, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_3, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_1, \breve{D}\right\},\left\{Z_5, Z_1, \breve{D}\right\},$
$\left\{Z_7, Z_6, Z_3\right\},\left\{Z_7, Z_6, Z_1\right\},\left\{Z_7, Z_4, Z_1\right\},\left\{Z_6, Z_3, D\right\},\left\{Z_6, Z_1, \breve{D}\right\},\left\{Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$

(see Diagram 3 in Figure 1.2.2);

4) $\left\{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$

(see Diagram 4 in Figure 1.2.2);

5) $\left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\right\},\left\{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\},\left\{Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$

(see Diagram 5 in Figure 1.2.2);

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ $\Sigma_4(X,8)$ კლასის D გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფები.

შევნიშნოთ, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე:

$$\begin{array}{c}\alpha=\left(Y_7^\alpha \times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha \times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha \times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha \times Z_4\right)\cup \\ \cup\left(Y_3^\alpha \times Z_3\right)\cup\left(Y_2^\alpha \times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha \times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)\end{array},$$

სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha$ არიან X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები და მათი გაერთიანება კი $X-$ ისტოლია.

ლემა2.2.1.ვთქვათ, $D=\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_{4,} Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X,8)$,

მაშინშემდეგისახისქვესიმრავლეები:

1) $\left\{Z_7\right\},\left\{Z_6\right\},\left\{Z_5\right\},\left\{Z_4\right\},\left\{Z_3\right\},\left\{Z_2\right\},\left\{Z_1\right\},\left\{\breve{D}\right\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 1 დიაგრამა);

2) $\left\{Z_7, Z_6\right\},\left\{Z_7, Z_4\right\},\left\{Z_7, Z_3\right\},\left\{Z_7, Z_1\right\},\left\{Z_7, \breve{D}\right\},\left\{Z_6, Z_3\right\},\left\{Z_6, Z_1\right\},$
$\left\{Z_6, \breve{D}\right\},\left\{Z_5, Z_1\right\},\left\{Z_5, \breve{D}\right\},\left\{Z_4, Z_1\right\},\left\{Z_4, \breve{D}\right\},\left\{Z_3, \breve{D}\right\},\left\{Z_2, \breve{D}\right\},\left\{Z_1, \breve{D}\right\}.$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ისმე-2 დიაგრამა);

3) $\left\{Z_7, Z_6, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_4, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_3, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_1, \breve{D}\right\},\left\{Z_5, Z_1, \breve{D}\right\},$
$\left\{Z_7, Z_6, Z_3\right\},\left\{Z_7, Z_6, Z_1\right\},\left\{Z_7, Z_4, Z_1\right\},\left\{Z_6, Z_3, D\right\},\left\{Z_6, Z_1, \breve{D}\right\},\left\{Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-3 დიაგრამა);

4) $\left\{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ისმე-4 დიაგრამა);

5) $\left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\right\},\left\{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\},\left\{Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\left\{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ისმე-5დიაგრამა);

6) $\left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$

7) $\left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ისმე-7დიაგრამა);

8) $\left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-8დიაგრამა);

9) $\{Z_7,Z_5,Z_1\},\{Z_7,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_1\},\{Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_2,D\},$
$\{Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},$
$\{Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_2,Z_1,\breve{D}\}.$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-9დიაგრამა);

10) $\{Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-10 დიაგრამა);

11) $\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-11 დიაგრამა);

12) $\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-12დიაგრამა);

13) $\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$
$\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},$
$\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_1\},\{Z_7,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-13 დიაგრამა);

14) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-14 დიაგრამა);

15) $\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-15 დიაგრამა);

16) $\{Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$
$\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-16 დიაგრამა);

17) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-17 დიაგრამა);

18) $\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-18 დიაგრამა);

19) $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-19დიაგრამა);

20) $\{Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-20დიაგრამა);

(see diagram 12 in Figure 1.2.1);

13) $\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$
$\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},$
$\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_1\},\{Z_7,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 13in Figure 1.2.1);

14) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 14 in Figure 1.2.1);

15) $\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$

(see diagram 15 in Figure 1.2.1);

16) $\{Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$
$\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 16 in Figure 1.2.1);

17) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 17 in Figure 1.2.1);

18) $\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 18 in Figure 1.2.1);

19) $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 19 in Figure 1.2.1);

20) $\{Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 20 in Figure 1.2.1);

21) $\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 21 in Figure 1.2.1);

22) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 22 in Figure 1.2.1);

23) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 23 in Figure 1.2.1);

24) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 24 in Figure 1.2.1);

25) $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 25 in Figure 1.2.1);

26) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 26 in Figure 1.2.1);

27) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 27 in Figure 1.2.1);

28) $\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 28 in Figure 1.2.1);

Lemma 2.2.1 Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$, then subsets of the following form

1) $\{Z_7\},\{Z_6\},\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}$

(see diagram 1 in Figure 1.2.1);

2) $\{Z_7,Z_6\},\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_3\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3\},\{Z_6,Z_1\},$
$\{Z_6,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 2 in Figure 1.2.1);

3) $\{Z_7,Z_6,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3\},$
$\{Z_7,Z_6,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_3,D\},\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 3 in Figure 1.2.1);

4) $\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 4 in Figure 1.2.1);

5) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 5 in Figure 1.2.1);

6) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 6 in Figure 1.2.1);

7) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 7 in Figure 1.2.1);

8) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 8 in Figure 1.2.1);

9) $\{Z_7,Z_5,Z_1\},\{Z_7,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_1\},\{Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_2,D\},\{Z_5,Z_4,Z_1\},$
$\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_3,Z_1,\breve{D}\},$
$\{Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 9 in Figure 1.2.1);

10) $\{Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 10 in Figure 1.2.1);

11) $\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(see diagram 11 in Figure 1.2.1);

12) $\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$

21) $\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 21-ედიაგრამა);

22) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 22-ედიაგრამა);

23) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 23-ე დიაგრამა);

24) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 24-ედიაგრამა);

25) $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 25-ედიაგრამა);

26) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 26-ედიაგრამა);

27) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 27-ედიაგრამა);

28) $\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 28-ედიაგრამა);

29) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 29-ედიაგრამა);

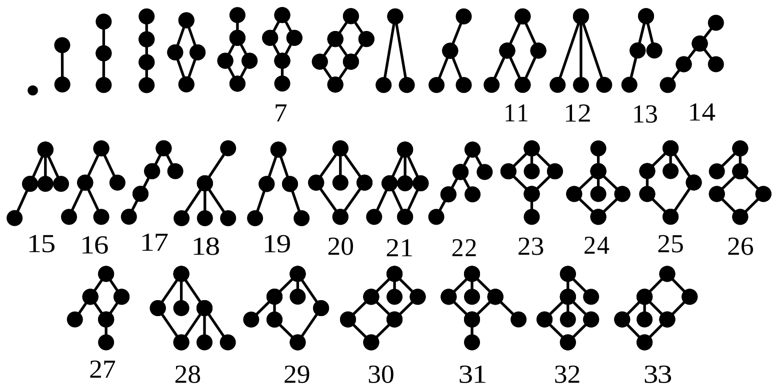
30) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 30-ედიაგრამა);

31) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 31-ედიაგრამა);

32) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,D\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 32-ედიაგრამა);

33) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.1-ის 33-ედიაგრამა)

D ნახევარმესერისყველაქვენახევარმესერსამოწურავს.



ნახ.2.2.1

ლემა2.2.2.ვთქვათ, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

მაშინშემდეგისახისქვესიმრავლეები:

1) $\{Z_7\},\{Z_6\},\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.2-ის 1 დიაგრამა);

2) $\{Z_7,Z_6\},\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_3\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3\},\{Z_6,Z_1\},\{Z_6,\breve{D}\},$
$\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.2-ის მე-2 დიაგრამა);

3) $\{Z_7,Z_6,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3\},$
$\{Z_7,Z_6,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_3,D\},\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.2-ის მე-3 დიაგრამა);

4) $\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.2-ის მე-4 დიაგრამა);

5) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.2-ის მე-5დიაგრამა);

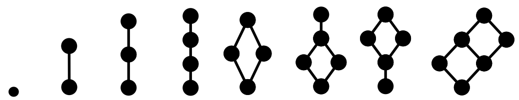
6) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.2-ის მე-6 დიაგრამა);

7) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.2-ის მე-7დიაგრამა);

8) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. ნახ.-2.2.2-ის მე-8 დიაგრამა);

D ნახევარ მესერის ყველა XI – ქვენახევარ მესერს ამოწურავს.

ლემა 2.2.2-ის თანახმად XI – ნახევარ მესერთა დიაგრამებს ექნებათ მეოთხე ნახაზზე მოცემული დიაგრამებიდან ერთ-ერთის სახე.



7

ნახ. 2.2.2

თეორემა2.2.1.ვთქვათ, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

ბინარული α მიმართება,აღებული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება მოცემული ნახევარჯგუ-

Is the mapping of the X -semilattice of unions on the family of sets $C(D)$. Then the formal equalities of the considered semilattice are written in the form

$$\begin{aligned}
\breve{D} &= P_0\cup P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6\cup P_7,\\
Z_1 &= P_0\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6\cup P_7,\\
Z_2 &= P_0\cup P_1\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6\cup P_7,\\
Z_3 &= P_0\cup P_1\cup P_2\cup P_4\cup P_5\cup P_6\cup P_7,\\
Z_4 &= P_0\cup P_2\cup P_3\cup P_5\cup P_6\cup P_7,\\
Z_5 &= P_0\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_6\cup P_7,\\
Z_6 &= P_0\cup P_2\cup P_4\cup P_5\cup P_7,\\
Z_7 &= P_0\cup P_2\cup P_5.
\end{aligned}$$

where $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\notin\{\varnothing\}$ and $|P_0|\ge 0$, $|P_6|\ge 0$ and $|P_7|\ge 0$ i. e. the elements P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 are basic sources, while the elements P_0, P_6 and P_7 are sources of completeness. Thus the number of basic sources is $\delta=$ while $|X|\ge 5$ (see [1, Item 2.1]).

Lemma 2.1.1. Assume that $D\in\Sigma_4(X,8)$ and is a finite set. If $|X|=n\ge 5$ and $|\Sigma_4(X,8)|=s$, then the number of all automorphisms in the semilattice D is $q=1$ and $s=9^n-5\cdot 8^n+10\cdot 7^n-10\cdot 6^n+5\cdot 5^n-4^n$.

Lemma2.1.2. Assume that $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}$ is any element from the class $\Sigma_4(X,8)$. Then the semigroup $B_X(D)$ defined by the semilattice has no rigt unit. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

Our aim is to study the complete semigroups $B_X(D)$ of binary relations defined by X – semilattices of unions D of the class $\Sigma_4(X,8)$.

Note that a quasinormal representation of any element of the semigroup $B_X(D)$ has the form

$$\alpha=(Y_7^\alpha\times Z_7)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_5^\alpha\times Z_5)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup$$
$$\cup(Y_3^\alpha\times Z_3)\cup(Y_2^\alpha\times Z_2)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1)\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$$

Where $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha,Y_4^\alpha,Y_3^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha,Y_0^\alpha$

are pairwise nonintersecting subsets of the set X and their union is equal to X.

$$y\alpha = \{x \in X \mid y\alpha x\},\ Y\alpha = \bigcup_{y\in Y} y\alpha,\ 2^X = \{Y \mid Y \subseteq X\},$$
$$X^* = 2^X \setminus \{\varnothing\}, V(D,\alpha) = \{Y\alpha \mid Y \in D\},\ D'_T = \{T' \in D' \mid T \subseteq T'\},$$
$$\ddot{D}'_T = \{T' \in D' \mid T' \subseteq T\}, D'_t = \{Z' \in D' \mid t \in Z'\},\ l(D',T) = \cup(D' \setminus D'_T).$$

The symbol $\Lambda(D,D')$ stands for an exact lower bound of the set D' in the semilattice D.

Definition 2.1.1. Let $\alpha \in B_X(D)$. If $\alpha \circ \alpha = \alpha$ or $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha$ for some $\beta \in B_X(D)$, then a binary relation α called respectively an idempotent element or a regular element of the semigroup $B_X(D)$.

Assume that X and $\Sigma_4(X,8)$ are respectively some nonempty set and the X-semilattice of unions of the class whose every element is isomorphic to the X-semilattice of unions $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, where satisfies the conditions

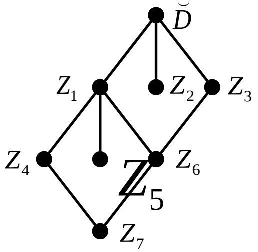


Fig.1.1.1

$$\begin{aligned}
&Z_7 \subset Z_4 \subset Z_1 \subset \breve{D},\\
&Z_7 \subset Z_6 \subset Z_1 \subset \breve{D},\\
&Z_7 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset \breve{D},\\
&Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\\
&Z_1 \setminus Z_3 \neq \varnothing,\ Z_3 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\\
&Z_2 \setminus Z_3 \neq \varnothing,\ Z_3 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\\
&Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\\
&Z_4 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_6 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\\
&Z_5 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_6 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\\
&Z_1 \cup Z_2 = Z_1 \cup Z_3 = \breve{D},\\
&Z_2 \cup Z_3 = Z_4 \cup Z_2 = Z_4 \cup\\
&Z_3 = Z_5 \cup Z_2 = Z_5 \cup Z_3 = \breve{D},\\
&Z_4 \cup Z_5 = Z_4 \cup Z_6 = Z_5 \cup Z_6 = Z_1.
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

The X-semilattice which satisfies conditions (1.1.1)is shown in Figure 1.

Assume that $C(D) = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$, where $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ and P_7 are some family of pairwise nonintersecting subsets of the set X and

$$\varphi = \begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ P_7 & P_6 & P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}$$

ფის იდემპოტენტური ელემენტი, როცა მისი კვაზინორმალური წარმოდგენა ქვემოთ მოყვანილი პირობებიდან აკმაყოფილებს თუნდაც ერთ პირობას:

a) $\alpha = X \times T$,

რომელიღაც $T \in D$ ელემენტისათვის;

b) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, რომელიღაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და $Y_T^\alpha \supseteq T$ $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$;

c) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, რომელიღაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin \{\varnothing\}$ და $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

d) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, რომელიღაც $T, T', Z \in D$, $Z_7 \subset T \subset T' \subset \breve{D}$, $Y_7^\alpha, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$ $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

e) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{T' \cup Z}^\alpha \times (T' \cup Z))$

რომელიღაც $'$ $\in$, $\subset$ $'$, $\subset$, $'$ $\neq \varnothing$, $' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$;

f) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$

რომელიღაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$.

g) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$

რომელიღაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$.

) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,

რომელიღაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $^\alpha \supseteq$, $^\alpha \cup$ $^\alpha \supseteq$, $^\alpha \cup$ $^\alpha \supseteq$, $^\alpha \cup$ $^\alpha \cup$ $^\alpha \supseteq$, $^\alpha \cap$ $\neq \varnothing$, $^\alpha \cap$ $\neq \varnothing$, $^\alpha \cap$ $\neq \varnothing$..

ახლავთქვათ $D \in \Sigma_4(X,8)$. შემოვიღოთაღნიშვნები:

) $= \{ \; \}$, სადაც $\in$;

) $= \{ \; '\}$, სადაც $' \in$ და $\subset$ $'$;

) $= \{ \; ' \; ''\}$, სადაც $' \; '' \in$ და $\subset \; ' \subset \; ''$;

) $= \{ \; ' \; \breve{} \}$, სადაც $' \in$ და $\subset \; \subset \; ' \subset \; \breve{}$;

) $= \{ \; ' \; ' \cup \; \}$, სადაც $' \; \in$, $\subset \; '$, $\subset$,

$' \neq \varnothing$, და $' \neq \varnothing$;

) $= \{ \; \breve{} \}$;

7) $Q_7 = \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$;

) $= \{ \; \breve{} \}$.

ვთქვათ $\Sigma(Q_i)$ $(i = 1,2,\ldots,8)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია Q_i ნახევარმესერის იზომორფული D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერთა სიმრავლე. $D' \in \Sigma(Q_i)$ და $I(D')$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $B_X(D')$ ნახევარჯგუფების ყველამა რჯვენა ერთეულების სიმრავლე. დავუშვათ, რომ

$$I^*(Q_i) = \bigcup_{D' \in \Sigma(Q_i)} I(D')$$

შენიშვნა. D' გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D')$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე ხშირად აღინიშნება $E_X^{(r)}(D')$ სიმბოლოთი.

ლემა2.2.3. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

) $| \; (\;) | = \;$;

) $| \; (\;) | = (\; | \; ' \; | - \;) \cdot \; | \; \; '|$;

) $| \; (\;) | = (\; | \; ' \; | - \;) \cdot (\; | \; '' \; '| - | \; '' \; '|) \cdot \; | \; \; ''|$;

) $| \; (\;) | = (\; | \; \; | - \;) \cdot (\; | \; ' \; | - | \; ' \; |) \cdot (\; | \breve{} \; '| - | \breve{} \; '|) \cdot \; | \; \; \breve{}|$;

) $| \; (\;) | = (\; | \; ' \; | - \;) \cdot (\; | \; \; '| - \;) \cdot \; | \; (\; ' \cup \;)|$;

Chapter-II

Idempotent Elements of the Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_4(X,8)$

In the given article formal equalities of $X-$semilattice of $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ unity are worked out.

The paper gives a full description of idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$, which are defined by semilsttices of the class $\Sigma \; (\quad)$. Formulas are derived, by means of vich the number of idempotent elements of the semigroup is calculated when X is a finite set.

Let X be an arbitrary nonempty set, D be an $X-$semilattice of unions, i.e. such a nonempty set of subsets of the set X that is closed with respect to the set-theoretic operations of unification of elements from D, f be an arbitrary mapping of the set X in the set D. To each such a mapping f we put into correspondence a binary relation α_f on the set X that satisfies the condition

$$\alpha_f = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$$

The set of all such $\alpha_f \; (f : X \to D)$ is denoted by $B_X(D)$. It is easy to prove (see [1,Item2.1])that $B_X(D)$ is a semigroup with respect to the operation of multiplication of binary relations, which is called a complete semigroup of binary relations defined by an $X-$semilattice of unions D.

We denote by $\varnothing$ an empty binary relation or an empty subset of the set X. The condition $(x, y) \in \alpha$ will be written in the form $x\alpha y$. Further let $x, y \in X$, $Y \subseteq X$, $\alpha \in B_X(D)$, $T \in D$, $\varnothing \neq D' \subseteq D$, $\breve{D} = \cup D$ and $t \in \breve{D}$. Then by symbols we denoted the following sets:

Lemma 1.2.7 Let $|X|=2$, $D=\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$. Then $B=\varnothing$ and the set $B_3' = B_1 \cup \{\gamma_0\}$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$.

Theorem 1.2.4. Let $|X| \geq 3$, $D=\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$. If

$$B=\{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*,\alpha)=D\},\ B_1=\{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*,\alpha)=\{Z_1,\breve{D}\}\},$$
$$\gamma_0=(Z_1\times\varnothing)\cup((X\setminus Z_1)\times Z_1).$$

Then the following statements are true:

a) if $|X\setminus\breve{D}| \geq 1$. Then the set $B\cup B_1$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$;

b) if $X=\breve{D}$, then the set $B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$.

c) if $|X|=2$, then the set $B_1\cup\{\gamma_0\}$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$.

Theorem 1.2.5.Let $D=\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$. If X is finite a set and $|X|=n$, then the following statements are true:

a) if $|X\setminus\breve{D}| \geq 1$, then the number $|B\cup B_1|$ of a set $B\cup B_1$ is equal to$|B\cup B_1| = 3^n - 2^{n+1}+1$;

b) if $|X|\geq 3$, $X=\breve{D}$, $\gamma_0=(Z_1\times\varnothing)\cup((X\setminus Z_1)\times Z_1)$, then the number $|B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}|$ of a set $B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}$ is equal to

$$|B\cup B_1\cup\{\gamma_1\}| = 3^n - 2^{n+1}+2;$$

c) if $|X|=2$, then then the number $|B_1\cup\{\gamma_1,\gamma_2\}|$ of a set $B_1\cup\{\gamma_0\}$ is equal to$|B_1\cup\{\gamma_0\}|=3$.

$) \,|\;(\quad)| = (\;|\quad|-\;)\cdot(\;|\quad|-\;)\cdot(\;|\quad|-|\quad|)\cdot|\quad|$;

$) \,|\;(\quad)| = (\;|\quad|-\;)\cdot|(\;\cap\;)\;|\cdot(\;|\quad|-|\quad|)\cdot(\;|\quad|-|\quad|)\cdot|\quad|$;

h) $|\;(\quad)| = (\;|\quad|-\;)\cdot(\;|\quad|-\;)\cdot(\;|\quad|-|\quad|)\cdot|\quad|$.

$\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმბოლოთი აღინიშნება D გაერთიანებათა სრულ $XI-$ ქვენახევარმესერთა სიმრავლე.

ახლა ვთქვათ $D, D' \in \Sigma'(X,D)$ და $\vartheta_{XI} \subseteq \Sigma'_{XI}(X,D)\times\Sigma'_{XI}(X,D)$. იტყვიან, რომ $D\vartheta_{XI}D'$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს სრული φ იზომორფიზმი D ნახევარმესერსა და D' სიმრავლეს შორის. ადვილად მოწმდება, რომ ბინარული ϑ_{XI} მიმართება არის ექვივალენტობის მიმართება $\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმრავლეზე.

ვთქვათ $Q_i\vartheta_{Xi}$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმრავ-ლეზე ϑ_{XI} ექვივალენტობის ის $\vartheta_{XI}-$კლასი, რომლის ყველა ელემენტი იზომორფულია Q_i გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერისა $(i=1,2,\ldots,8)$.

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

ლემა2.3.1. ვთქვათ, $D=\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|\;^*(\quad)| = \;$.

ლემა2.3.2. ვთქვათ, $D=\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|\;^*(\quad)|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$|I^*(Q_2)| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_6|} + \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|} +$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}+2^{|Z_3\setminus Z_6|}-2\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}+2^{|Z_1\setminus Z_6|}+2^{|Z_1\setminus Z_5|}+2^{|Z_1\setminus Z_4|}-4\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|} +$$
$$+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-7\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

ლემა2.3.3. ვთქვათ, $D=\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|\;^*(\quad)|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_3)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

ლემა2.3.4. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|{}^{*}(\quad)\right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_4)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

ლემა 2.3.5. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|{}^{*}(\quad)\right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_5)\right| = 2\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

ლემა 2.3.6. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|{}^{*}(\quad)\right|$ რიცხვი გამოითვლებ აფორმულით:

$$\left|I^*(Q_6)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}$$

ლემა 1.3.7. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|{}^{*}(\quad)\right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_7)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

ლემა2.3.8. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$.

Lemma 1.2.3. Let $|X|\ge 3$, $D=\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1(X,3)$ and

$$B=\left\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\}.$$

Then the following statements are true;

a) the elements of the set $B_1\cup\left\{X\times Z_1, X\times\breve{D}\right\}$ do not generating by elements of the set B;

b) if $\left|X\setminus\breve{D}\right|\le 1$, then element $\alpha=\varnothing$ do not generating by elements of the set B;

c) if $X=\breve{D}$, then elements of the set B_3 do not generating by elements of the set B.

Lemma 1.2.4. Let $|X|\ge 3$, $D=\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1(X,3)$ and

$$B=\left\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\},\ \gamma_0=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right).$$

Then the following statements are true:

a) if $\left|X\setminus\breve{D}\right|\ge 1$, then elements of the set $B_2\cup B_3$ are generating by elements of the set B;

b) if $X=\breve{D}$, then the elements of the set B_3 are generating by elements of the set $B\cup B_1\cup\left\{\gamma_0\right\}$;

c) if $X=\breve{D}$, then the elements of the set B_2 are generating by elements of the set $B_1\cup\left\{\gamma_0\right\}$. **Lemma 1.2.5.** Let $|X|\ge 3$, $D=\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1(X,3)$, $B=\left\{\alpha\in B_X(D)|V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\}$ and $B_1=\left\{\alpha\in B_X(D)|V\left(X^*,\alpha\right)=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$.

If $\left|X\setminus\breve{D}\right|\ge 1$, then the set $B_1'=B\cup B_1$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$.

Lemma 1.2.6. Let $|X|\ge 3$, $D=\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1(X,3)$ and

$B=\left\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\}$, $B_1=\left\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V\left(X^*,\alpha\right)=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$, If
$\gamma_0=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)$.

$X=\breve{D}$, then the set $B_2'=B\cup B_1\cup\left\{\gamma_0\right\}$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$.

Theorem 1.2.3. Let $D=\{Z_2, Z_1, \breve{D}\}\in\Sigma_1(X,3)$ and $Z_2\neq\varnothing$. If $E_X^{(r)}(D)$ be the set all right units of the semigroup $B_X(D)$,

$$\sigma_1=(Z_2\times Z_2)\cup((X\setminus Z_2)\times Z_1),\ \sigma_2=(Z_2\times Z_2)\cup((X\setminus Z_2)\times \breve{D}),$$
$$\sigma_3=(Z_1\times Z_2)\cup((X\setminus Z_1)\times \breve{D}),\ \sigma_4=(Z_1\times Z_1)\cup((X\setminus Z_1)\times \breve{D})$$

and $B'=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$, then $B=E_X^{(r)}(D)\cup B'$ is irreducible generated set for the semigroup $B_X(D)$.

In the sequel, we will be assumption, that $Z_2=\varnothing$.

Lemma 1.2.1. Let $D=\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}\in\Sigma_1(X,3)$ and $B=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V(X^*,\alpha)=D\}$. Then the following statements are true:

a) $B\neq\varnothing$ if and only if, when $|X|\geq 3$;

b) $P_0=\cap D=\varnothing$, $P_1=\breve{D}\setminus Z_1$ and $P_2=Z_1$;

c) If $\alpha=\delta\circ\beta$, for some $\alpha\in B$, $\delta,\beta\in B_X(D)$, then $V(D,\beta)=D$;

d) if $|X|\geq 3$, then B is a set external elements of the semigroup $B_X(D)$.

Lemma 1.2.2. Let $|X|\geq 3$ and $D=\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}\in\Sigma_1(X,3)$, then the following statements are true:

a) $Z_1\beta=\varnothing,\ \breve{D}\beta=Z_1$ for some $\beta\in B$ if and only if, when $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$;

b) $Z_1\beta=\breve{D}\beta=Z_1$ for some $\beta\in B$ if and only if $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$;

c) $Z_1\beta=\breve{D}\beta=\varnothing$ for some $\beta\in B$ if and only if $|X\setminus\breve{D}|\geq 2$.

In the sequel, by symbols B_1, B_2 and B_3 we denoted the following sets:

$$B_1=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V(X^*,\alpha)=\{Z_1,\breve{D}\}\},$$
$$B_2=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V(X^*,\alpha)=\{\varnothing,\breve{D}\}\},$$
$$B_3=\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V(X^*,\alpha)=\{\varnothing,Z_1\}\}.$$

By definition of a sets B_1, B_2 and B_3 immediately follows, that

$$B_1\cap B_2=B_1\cap B_3=B_2\cap B_2=\varnothing.$$

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|\,{}^{*}(\quad)|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_8)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, ხოლო არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტების სიმრავლე, მაშინ

$$|I_D|=|I^*(Q_1)|+|I^*(Q_2)|+|I^*(Q_3)|+|I^*(Q_4)|+|I^*(Q_5)|+$$
$$+|I^*(Q_6)|+|I^*(Q_7)|+|I^*(Q_8)|$$

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფი, რომლის ერთეულია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ε ბინარული მიმართება, აღვნიშნოთ $G_X(D,\varepsilon)$ სიმბოლოთი და აღვწეროთ $D\in\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების მაქსიმალური ქვეჯგუფები.

თეორემა 2.3.2. თუ $D\in\Sigma_4(X,8)$, მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართებისათვის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის $G_X(D,\varepsilon)$ ქვეჯგუფი წარმოადგენს ჯგუფს, რომლის რიგი არაუმეტეს 2-ისტოლია.

IIIთავი

$\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები

მოცემულთავში სრულად არის გადმოცემული $\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებით განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები. იმ შემთხვევაში, როცა X სასრულო სიმრავლეა, მოცემულია შესაბამისი ნახევარჯგუფების რეგულარულ ელემენტთა რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულები.

ამასთანავე ნაშრომშივამტკიცებთ, რომ $\Sigma_4(X,8)$ კლასის D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ სრული ნახევარჯგუფების ყველა რეგულარული ელემენ-ტების R_D სიმრავლე წამოადგენს ამ ნახევარჯგუფის ქვენახევარ-ჯგუფს.

განმარტება3.1.1. α ელემენტს, აღებულს $B_X(D)$ ნახევარ-ჯგუფიდან, ეწოდება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, თუ $B_X(D)$–ში არსებობს ისეთი β ელემენტი, რომ

$$\alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha.$$

თეორემა 3.1.1.ვთქვათ $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$,

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = \bigcup_{\in(\ \alpha)} (\ ^{\alpha} \times\ )$$

იქნება მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელე-მენტი, მაშინ და მხოლოდმ აშინ, როცა არსებობს სრული φ α– იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერიდან D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

a) $\alpha = X\times T$, რომელიღაც $T\in D$ ელემენტისათვის;

b) $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$, რომელიღაც $T,T'\in D$, $T\subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;ელემენტებისათვის

c) $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T''}^\alpha\times T'')$, რომელიღაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$; ელემენტებისათვის

d) $\alpha=(Y_7^\alpha\times Z_7)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$, რომელიღაც $T,T',Z\in D$, $Z_7\subset T\subset T'\subset\breve{D}$, $Y_7^\alpha,Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$,

a) if $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$ and $Z_1\neq\varnothing$, then B is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$;

b) if $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$ and $Z_1=\varnothing$, then $B\cup\{X\times\breve{D}\}$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$;

c) if $X=\breve{D}$ and $Z_1\neq\varnothing$, then $B\cup\{X\times Z_1\}$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$;

d) if $X=\breve{D}$ and $Z_1=\varnothing$, then $B\cup\{\varnothing, X\times\breve{D}\}$ is irreducible generating set for the semigroup $B_X(D)$.

Corollary 1.1.2. Let X be finite a set, $D=\{Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_1(X,2)$ .If $|X|=n$, then for the number of the irreducible generated set B' of the semigroup $B_X(D)$ following statements are true:

a) if $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$ and $Z_1\neq\varnothing$, then $|B'|=2^n-2$;

b) if $|X\setminus\breve{D}|\geq 1$ and $Z_1=\varnothing$ or $X=\breve{D}$ and $Z_1\neq\varnothing$, then $|B'|=2^n-1$;

d) if $X=\breve{D}$ and $Z_1=\varnothing$, then $|B'|=2^n$.

Definition 1.2.1. In the sequel, the elements $\bar{\beta}_1$ and $\bar{\beta}_2$ will be called normal and complement mappings for the binary relation $\bar{\beta}\in B_X(D)$.

Theorem 1.2.1. Let X is finite a set and $\alpha,\beta\in B_X(D)$, then for any subquasinormal representation $\bar{\beta}$ of a binary relation β the equality $\alpha\circ\beta=\alpha\circ\bar{\beta}$ is hold.

Theorem 1.2.2. Let $\tilde{B}$ be any generating set of the semigroup $B_X(D)$. If for some α and δ of the set $\tilde{B}$ and subquasinormal representation $\bar{\beta}\in B_X(D)$ of a binary relation $\beta\in\tilde{B}$ the inequality $\alpha\neq\delta\circ\bar{\beta}$ is hold, then the condition $\alpha\neq\delta\circ\beta$ is also true.

a) $\overline{\beta} \in B_X(D)$; **b**) $\beta \subseteq \overline{\beta}$;

c) the subquasinormal representation of the binary relation β is quasinormal;

d) if $\overline{\beta}_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_{m-1} \\ P_0\overline{\beta} & P_1\overline{\beta} & \dots & P_{m-1}\overline{\beta} \end{pmatrix}$, then $\overline{\beta}_1$ is a mapping of the family of sets $C(D)$ in the set $D \cup \{\varnothing\}$.

e) if $\overline{\beta}_2 : X \setminus \breve{D} \to D$ is a mapping satisfying the condition $\overline{\beta}_2(t') = t'\beta$ for all $t' \in X \setminus \breve{D}$, then $\overline{\beta} = \bigcup_{i=0}^{m-1}\left(P_i \times \bigcup_{t \in P_i} t\beta\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\beta}_2(t')\right)$.

Remark, that if P_j $(0 \le j \le m-1)$ is such completeness sources, that $P_j = \varnothing$, then the equality $P_j\overline{\beta} = \varnothing$ always is hold. There also exists such a basic sources P_i $(0 \le i \le m-1)$ for which $\bigcup_{t \in P_i} t\beta = \varnothing$, i.e. $P_i\overline{\beta} = \varnothing$.

Theorem 1.1.2. Let $\alpha, \beta \in B_X(D)$, then $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \overline{\beta}$

Lemma 1.1.1. Let $D = \{Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,2)$, $B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$. If $B \ne \varnothing$, then B is a set external elements of the semigroup $B_X(D)$.

Corollary 1.1.1. Let $D = \{\varnothing, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,2)$ and $B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$. Then the following statements are true:

1) If $|X \setminus \breve{D}| \ge 1$ and $Z_1 = \varnothing$, then $\alpha = X \times D$ do not generating by elements of the set B;

2) If $X = \breve{D}$ and $Z_1 \ne \varnothing$, then $\alpha = X \times Z_1$ do not generating by elements of the set B;

3) If $X = \breve{D}$ and $Z_1 = \varnothing$, then $\alpha = \varnothing$ and $\alpha = X \times \breve{D}$ do not generating by elements of the set B.

Theorem 1.1.3. Let $D = \{Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,2)$. If $B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$, then the following statements are true:

$Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \ne \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \ne \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \ne \varnothing$; ელემენტებისათვის

e) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{T' \cup Z}^\alpha \times (T' \cup Z))$

რომელიღაც $'$ $\in$, $\subset$ $'$, $\subset$, $'$ $\ne \varnothing$, $' \ne \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \ne \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \ne \varnothing$; ელემენტებისათვის

f) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$

რომელიღაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \ne \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \ne \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \ne \varnothing$.

ელემენტებისათვის

g) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$

რომელიღაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$ $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \ne \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \ne \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \ne \varnothing$. ელემენტებისათვის

) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,

რომელიღაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $^\alpha \supseteq \varphi(\ )$, $^\alpha \cup {}^\alpha \supseteq \varphi(\ )$, $^\alpha \cup {}^\alpha \supseteq \varphi(\ )$, $^\alpha \cup {}^\alpha \cup {}^\alpha \supseteq \varphi(\ )$, $^\alpha \cap \varphi(\ ) \ne \varnothing$, $^\alpha \cap \varphi(\ ) \ne \varnothing$, $^\alpha \cap \varphi(\ ) \ne \varnothing$. ელემენტებისათვის

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

) $= \{\ \}$, სადაც $\in$;

) $= \{\ '\}$, სადაც $' \in$ და $\subset$ $'$;

) $= \{\ '\ ''\}$, სადაც $'$ $'' \in$ და $\subset$ $' \subset$ $''$;

) $= \{\ '\ \breve{}\}$, სადაც $' \in$ და $\subset$ $\subset$ $' \subset$ $\breve{}$;

) $= \{\ '\ '\cup\ \}$, სადაც $'$ $\in$, $\subset$ $'$, $\subset$, $'$ $\ne \varnothing$, და $' \ne \varnothing$;

) $= \{\ \breve{}\}$;

7) $Q_7 = \left\{ Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\}$;

$) \quad = \left\{ \qquad\qquad\qquad \breve{} \right\}$.

ვთქვათ $\Sigma(Q_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია Q_i ნახევარმესერის იზომორფული D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერთა სიმრავლე. ახლა, ვთქვათ $D' \in \Sigma(Q_i)$ და $R(D')$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $B_X(D')$ ნახევარჯგუფების ყველა ისეთი α რეგულარული ელემენტების სიმრავლე, რომელთათვისაც $V(D, \alpha)$ და Q_i ნახევარმესერები ერთმანეთის $\alpha-$ იზომორფულია და $V(D, \alpha) = Q_i$.

$\Sigma'_{XI}(X, D)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერების სიმრავლე. შემდეგ ვთქვათ, $D, D' \in \Sigma'(X, D)$ და $\vartheta_{XI} \subseteq \Sigma'_{XI}(X, D) \times \Sigma'_{XI}(X, D)$.
იგულისხმება, რომ $D \vartheta_{XI} D'$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა D და D' ნახევარმესერებს შორის არსებობს რაღაც φ სრული იზომორფიზმი. ადვილად შემოწმდება, რომ ბინარული ϑ_{XI} მიმართება არის ექვივალენტობის მიმართება $\Sigma'_{XI}(X, D)$ სიმრავ-ლეზე. $Q_i \vartheta_{XI}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $\Sigma'_{XI}(X, D)$ სიმრავლეზე $\vartheta_{XI}-$ ექვივალენტობის ის კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი იზომორფულია Q_i $X-$ ნახევარმესერისა და თანახმად

$$R^*(Q_i) = \bigcup_{D' \in Q_i \vartheta_{XI}} R(D').$$

ლემა 3.2.1 თუ $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

$) \,|\ (\quad)| = \ ;$

$) \,|\ (\quad)| = \ \cdot \left(\ |^{-\prime}\ ^{-}| - \ \right) \cdot \ |\ \ ^{-\prime}| ;$

$) \,|\ (\quad)| = \ \cdot \left(\ |^{-\prime}\ ^{-}| - \ \right) \cdot \left(\ |^{-\prime\prime}\ ^{-\prime}| - \ |^{-\prime\prime}\ ^{-\prime}| \right) \cdot \ |\ \ ^{-\prime\prime}| ;$

$) \,|\ (\quad)| = \ \cdot \left(\ |^{-}\ \ | - \ \right) \cdot \left(\ |^{-\prime}\ ^{-}| - \ |^{-\prime}\ ^{-}| \right) \cdot \left(\ |^{\smile}\ ^{-\prime}| - \ |^{\smile}\ ^{-\prime}| \right) \cdot \ |\ \ ^{\smile}| ;$

Theorem 1.1.1. Let $D = \left\{ \breve{D}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{m-1} \right\}$ be some finite $X-$ semilattice of unions and $C(D) = \left\{ P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1} \right\}$ be the family of sets of pairwise nonintersecting subsets of the set X (the set $\varnothing$ can be repeat several time). If φ is a mapping of the semilattice D on the family of sets $C(D)$ which satisfies the condition

$$\varphi = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{m-1} \\ P_0 & P_1 & P_2 & \ldots & P_{m-1} \end{pmatrix}$$

and $\hat{D}_Z = D \setminus D_Z$, then the following equalities are valid:

$$\begin{aligned} \breve{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_{m-1} \\ Z_i &= P_0 \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_{Z_i}} \varphi(T) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

In the sequel these equalities will be called formal.

It is proved that if the elements of the semilattice D are represented in the form (3.1.1), then among the parameters P_i $(0 < i \le m-1)$ there exist such parameters that cannot be empty sets for D. Such sets P_i are called basis sources, whereas sets P_j $(0 \le j \le m-1)$ which can be empty sets too are called completeness sources.

It is proved that under the mapping φ the number of covering elements of the pre-image of a basis source is always equal to one, while under the mapping φ the number of covering elements of the pre-image of a completeness source either does not exist or is always greater than one (see [1], chapter 11).

Let $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ be parameters in the formal equalities, $\beta \in B_X(D)$ and $\bar{\beta} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \left(P_i \times \bigcup_{t \in P_i} t\beta \right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times t'\beta \right)$.

The representation of the binary relation β of the form $\bar{\beta}$ will be called subquasinormal.

If $\bar{\beta}$ be the subquasinormal representation of the binary relation β, then for the binary relation $\bar{\beta}$ the following statements are true:

studying the abstract qualities of semigroups (i.e. the qualities, which are kept in isomorphism).

The present work studies the qualities of semigroups with the help of the qualities of semilattice. The significant part of the abstract qualities of the total semigroups of binary relations is mainly determined by that unification of total $X-$semilattice, which determine the elements of the given class.

The present work makes use of the theory of lattice, the theory of semigroups, the theory of the set and some methods of combinatorics.

THE PRACTICAL AND THEORETICAL IMPORTANCE OF THE THESIS

The dissertation is mainly theoretical. The results of the work can be used for investigating semigroups and semilattices in future.

THE STRUCTURE AND VOLUME OF THE THESIS

The study consist of introduction, three chapters with eight paragraphs and four appendices. The total length of thesis approaches 202 pages (143 pages cover the main part of the study, the rest includes appendices).

GENERAL CHARACTERIZATION OF THESIS

Chapter –I
Generated sets of the complete semigroup binary relations defined by semilattices of the $\Sigma_1(X,2)$ and $\Sigma_1(X,3)$

In this article, we study generated sets of the complete semigroup $B_X(D)$ defined by an $X-$semilattice D of the class $\Sigma_1(X,2)$ and $\Sigma_1(X,3)$.

$) \,|\; (\quad)| = \cdot \quad \cdot \left(\quad - \right) \cdot \left(\quad - \right) \cdot \quad (\; ' \cup \;) ;$

$) \,|\; (\quad)| = \cdot \quad \cdot \left(\quad - \right) \cdot \left(\quad - \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad ;$

$) \,|\; (\quad)| = \cdot \quad \cdot \left(\quad - \right) \cdot \quad (\; \cap \;) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad ;$

$) \,|\; (\quad)| = \quad \cdot \left(\quad - \right) \cdot \left(\quad - \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad .$

ლემა 3.2.2. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$.

თუ   სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$| \, {}^*(\quad)| = \quad .$$

გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$Q_2\theta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_1\right\},\left\{Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_6\right\},\left\{Z_7,Z_4\right\},\left\{Z_7,Z_3\right\},\left\{Z_7,Z_1\right\},\right.$$
$$\left.\left\{Z_6,Z_3\right\},\left\{Z_6,Z_1\right\},\left\{Z_6,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,\breve{D}\right\},\left\{Z_4,Z_1\right\},\left\{Z_4,\breve{D}\right\},\left\{Z_3,\breve{D}\right\}\right\}.$$

ახლათუ

$$D_1'=\left\{Z_7,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{Z_5,\breve{D}\right\},\ D_3'=\left\{Z_2,\breve{D}\right\},\ D_4'=\left\{Z_1,\breve{D}\right\},D_5'=\left\{Z_7,Z_6\right\},$$
$$D_6'=\left\{Z_7,Z_4\right\},\ D_7'=\left\{Z_7,Z_3\right\},\ D_8'=\left\{Z_7,Z_1\right\},D_9'=\left\{Z_6,Z_3\right\},\ D_{10}'=\left\{Z_6,Z_1\right\},$$
$$D_{11}'=\left\{Z_6,\breve{D}\right\},\ D_{12}'=\left\{Z_5,Z_1\right\},\ D_{13}'=\left\{Z_4,Z_1\right\},\ D_{14}'=\left\{Z_4,\breve{D}\right\},\ D_{15}'=\left\{Z_3,\breve{D}\right\}.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$R^*(Q_2)=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4')\cup R(D_5')\cup R(D_6')\cup R(D_7')\cup R(D_8')\cup$$
$$\cup R(D_9')\cup R(D_{10}')\cup R(D_{11}')\cup R(D_{12}')\cup R(D_{13}')\cup R(D_{14}')\cup R(D_{15}')$$

ლემა. 3.2.3. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$. მაშინ

$$|R^*(Q_2)|=|R(D_1')|+|R(D_2')|+|R(D_3')|-|R(D_4')|.$$

ლემა. 3.2.4. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$. თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|R^*(Q_2)|=15\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}$.

გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმადგ ვაქვს

$$Q_2\theta_{XI} = \left\{\left\{Z_7, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_1\right\}, \left\{Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_6\right\}, \left\{Z_7, Z_4\right\}, \left\{Z_7, Z_3\right\},\right.$$
$$\left.\left\{Z_7, Z_1\right\}, \left\{Z_6, Z_3\right\}, \left\{Z_6, Z_1\right\}, \left\{Z_6, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_1\right\}, \left\{Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, \breve{D}\right\}\right\}.$$

ახლა თუ

$$D_1' = \left\{Z_7, Z_6, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_7, Z_4, \breve{D}\right\},\ D_3' = \left\{Z_7, Z_3, \breve{D}\right\},$$
$$D_4' = \left\{Z_7, Z_1, \breve{D}\right\}, D_5' = \left\{Z_5, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_6' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3\right\},$$
$$D_7' = \left\{Z_7, Z_4, Z_1\right\},\ D_8' = \left\{Z_7, Z_6, Z_1\right\}, D_9' = \left\{Z_6, Z_1, \breve{D}\right\},$$
$$D_{10}' = \left\{Z_6, Z_3, \breve{D}\right\},\ D_{11}' = \left\{Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}.$$

მაშინმივიღებთ:

$$R^*(Q_3) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \cup R(D_4') \cup R(D_5') \cup R(D_6') \cup$$
$$\cup R(D_7') \cup R(D_8') \cup R(D_9') \cup R(D_{10}') \cup R(D_{11}').$$

ლემა3.2.5 ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X, 8)$. მაშინ

$$\left|R^*(Q_3)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| -$$
$$-\left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| - \left|R(D_1') \cap R(D_4')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_4')\right|.$$

ლემა3.2.6. ვთქვათ $' = \{ \quad ' \ \breve{} \}$ და $'' = \{ \quad ' \ \breve{} \}$, სადაც $' \supseteq \ '$. თუ $(\ )$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (\ ^{\alpha} \times \ ) \cup (\ ^{\alpha} \times \ ) \cup (\ ^{\alpha} \times \breve{}\ )$, რომელიღაც $\in \ ,\ \subset \ \subset \breve{}$ და $^{\alpha} \ ^{\alpha} \ ^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$, მაშინ

$$\alpha \in R(D') \cap R(D'')$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y_7^{\alpha} \supseteq Z_7,\ Y_7^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \supseteq Y_1',$ $Y_T^{\alpha} \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_0^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing.$

ლემა3.2.7. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X, 8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობები:

$$\left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| = 11 \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_6|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|},$$
$$\left|R(D_1') \cap R(D_4')\right| = 11 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_6|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|},$$
$$\left|R(D_2') \cap R(D_4')\right| = 11 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

ლემა3.2.8. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X, 8)$. თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

complete semigroups of all binary relations defined by the $\Sigma_4(X, 8)$ semilattice.

SCIENTIFIC NOVELTY OF THESIS

The present work deals with generating systems of finite semigroups of binary relations defined with finite $X-$ semilattices of $\Sigma_1(X, 2)$ and $\Sigma_1(X, 3)$, that has never been studied before. Also it deals with the classes of semigroups of $B_X(D)$ of total binary relations defined by the semilattice $\Sigma_4(X, 8)$ for the first time ever. The semilattice of the given classes are studied according to the relevant diagrams.

In case of X set, the formula for counting the amount of semilattice in the class $\Sigma_4(X, 8)$ has been created. All the semilattice of the given class has been described and the $XI-$ subsemilattice has beem singled out.

The idempotent elements and their qualities of the semigroups defined by each D semilattice of the $\Sigma_4(X, 8)$ class have been studied. The formulas for counting the amount of the idempotent and regular elements in case of X as a finite set have been formulated.

The study of given subjects is entirely based on the unification total $X-$ the main qualities of the semilattice. The outcomes gained in the research gave us the opportunity to talk about the great number of qualities of the semigroup. In particular, whether it has right elements, how its idempotent and regular elements are built. It is possible based on the relevant diagram of the defining semilattice.

BASIC METHODS OF INVESTIGATION

It is known that idempotent elements of semigroups, one-sided units, regular elements, maximum subgroups play important role in

$B_X(D)$ semi groupis called the total semi group of binary relations defined with the total $X-$ semi lattice of D consolidation.

Suppose, the total X as a unification of D m capacity is semilattice; $B_X(D)$ $-D$ The total unification X - the semi group defined by semilattice of binary relations. Many of the abstract qualities of $B_X(D)$ semi group are closely connected with D semillatice.

The unification of total X - semilattice, which has a fixed diagram and contains an empty set, defines such classes of binary relations of complete semi groups, which always contain any isomorphic semigroups as well as the semigroup of any binary relations (see theorem 5.6.1). The qualities of semi groups of this class are closely connected with the qualities of elements of semilattice, which define the given semigroup. These qualities are: Whether they have identified the elements creating the semi lattice of the set, or if their elements create the chain and etc.

GOALS OF THESIS

The main aim of the research is to study generating systems of finite semigroups of binary relations defined with finite $X-$ semilattices of $\Sigma_1(X,2)$ and $\Sigma_1(X,3)$, classes unifications and also such qualities of the total semigroup of binary relations defined by $X-$ semilattice of $\Sigma_4(X,8)$ class unification which are kept during the isomorphism.

SCIENTIFIC NOVELTY OF THESIS

Represents the finite $X-$ semilattice of $\Sigma_1(X,2)$, $\Sigma_1(X,3)$ and $\Sigma_4(X,8)$ classes unifications. Also, the subject of the research is the

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_3)\right| &= 11\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+11\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+11\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+11\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+11\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ &-11\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ &-11\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ &-11\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

გაერთიანებათანახევარმესერისგანსაზღვრისთანახმადგვაქ ვს: $Q_4\theta_{XI}=\left\{\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\}\right\}$

ახლათუ

$$D_1'=\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\ D_3'=\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\}$$

მაშინმივიღებთ:

$$R^*(Q_4)=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')$$

ლემა3.2.9. ვთქვათ $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

მაშინ $|R^*(Q_4)|=|R(D_1')|+|R(D_2')|+|R(D_3')|$.

ლემა3.2.10. ვთქვათ, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\begin{aligned}|R^*(Q_4)| &= 3\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+3\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+3\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

გაერთიანება თანახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$Q_5\theta_{XI}=\left\{\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\right\}$$

ახლათუ

$$\begin{aligned}&D_1'=\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},D_2'=\{Z_7,Z_4,Z_6,Z_1\},D_3'=\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\\ &D_4'=\{Z_7,Z_3,Z_4,\breve{D}\},D_5'=\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\},D_6'=\{Z_7,Z_1,Z_3,\breve{D}\},\\ &D_7'=\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},D_8'=\{Z_6,Z_1,Z_3,\breve{D}\}.\end{aligned}$$

მაშინ მივიღებთ:

$$R^*(Q_5) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \cup R(D_4') \cup \cup R(D_5') \cup R(D_6') \cup R(D_7') \cup R(D_8').$$

ლემა 3.2.11.ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left|R^*(Q_5)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| + \left|R(D_6')\right| - \\ -\left|R(D_1') \cap R(D_4')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_3')\right| - \left|R(D_3') \cap R(D_6')\right| - \left|R(D_4') \cap R(D_5')\right|.$$

ლემა3.2.12. ვთქვათ, $D' = \{Z_7, Y, Y', Y \cup Y'\}$ და $D'' = \{Z_7, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1'\}$ არიან $\{D_1', D_2', D_3', D_4', D_5', D_6'\}$ სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $' \neq ''$, $\supseteq$, $' \supseteq '$ და $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')\right),$$

სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$. მაშინ $\alpha \in (\ ') \cap (\ '')$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_{T'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing.$$

ლემა 3.2.13. ვთქვათ $D' = \{Z_7, Y, Y', Y \cup Y'\}$ და $D'' = \{Z_7, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1'\}$ არიან $\{D_1', D_2', D_3', D_4', D_5', D_6'\}$ სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $' \neq ''$, $\supseteq$, $' \supseteq '$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$|\ (\ ') \cap (\ '')| = \cdot | \ | \cdot (| \ | -) \cdot (| \ | -) \cdot | \ \breve{}|$$
$$|\ (\ ') \cap (\ ')| = \cdot (| \ | -) \cdot | \ | \cdot (| \ | -) \cdot | \ \breve{}|$$
$$|\ (\ ') \cap (\ ')| = \cdot (| \ | -) \cdot (| \ | -) \cdot | \ \breve{}|$$
$$|\ (\ ') \cap (\ ')| = \cdot (| \ | -) \cdot (| \ | -) \cdot | \ \breve{}|$$

ლემა3.2.14. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X,8)$. თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*(Q_5)\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + 8 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ + 8 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} - 8 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_1|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} - \\ - 8 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

ACTUALITY OF THE TOPIC

The semi group is a non-empty set, discussedin relation to binary algebraic operation defined in it. According to Felix Klein, there were some doubts about regarding the so-called "semi group"as the main initial concepteven during the period of the group theory establishment. Though, at that stage of the Math development the decision was made in favor of the concept "groups".

In the theory of semi groups the most important results are related to the semi groups of binary relations.

The language of binary relations is convenient to use in Math Linguistics, Math Biology and in different fields of applied Math. For instance, the theory of binary relations is widely used in the theory of Automaton. In particular, each finite universal automatic machine can be represented as a check marked oriented graph, which is called the diagram of the state.

The complexity of studying semi groups of binary relations is that, they do not represent regular semi groups that make the studies difficult. In connection with that, it became very interesting to study the semi groups of binary relations and the systematic study of some important classes with the help of total $X-$semi lattice which was first used by Iasha Diasamidze in his dissertation. (see. [68]). Let me describe the method briefly.

In particular, with the symbol D we can note such non-empty set of subsets of X set, which is close towards consolidation operation of theoretical –set of D set elements. It is called the total $X-$semi lattice. f should be any mapping of set X into the set D. Each mapping of f should correspond $\alpha_f = \bigcup\limits_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x)\right)$ binary relation on X set.

All of the set of binary relations α_f $(f : X \to D)$ can be marked with the symbol $B_X(D)$. It is proved that $B_X(D)$ is semi group.

The dissertation work has been carried out in the Department of Mathematics of Faculty of Physics-Mathematics and Computer Sciences of Batumi Shota Rustaveli State University.

Scientific Supervisor:

Yasha Diasamidze
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Batumi Shota Rustaveli State University.

Foreign evaluators:

Nuri Chimen
Professor, Çanakkale Onsekiz Mart University.

Ali Erdoğan
Professor, Hacettepe University.

Evaluators:

Mikheil Amaglobeli
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University.

Tengiz Bokelavadze
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Akaki Tsereteli State University.

Guladi Fartenadze
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Batumi Shota Rustaveli State University.

Defence of Dissertation work will be held on 23 June, 2017, ____ at the Dissertation council of faculty of Physics-Mathematics and Computer Sciences of Batumi Shota Rustaveli State University.

Address: Georgia, Batumi, Ninoshvili str. 35, 6010, Shota Rustaveli holl №____, University Building I

The thesis will be available at the Batumi Shota Rustaveli State University Library and on the Web-page **www.bsu.edu.ge**

The secretary of the Dissertation Council,
Associate Professor **Dali Makharadze**

გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გაქვს: $Q_6\theta_{XI} = \left\{\left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$

ახლათუ $D_1' = \left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$, მაშინ $R^*(Q_6) = R(D_1')$ და $\left|R^*(Q_6)\right| = \left|R(D_1')\right|$.

ლემა3.2.15. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X,8)$. თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*(Q_6)\right| = 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახ-მადგვაქვს: $Q_7\theta_{XI} = \left\{\left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$ ახლა თუ $D_1' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$, მაშინ $R^*(Q_7) = R(D_1')$ და $\left|R^*(Q_7)\right| = \left|R(D_1')\right|$.

ლემა3.2.16. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X,8)$. თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*(Q_7)\right| = 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახ-მად გვაქვს: $Q_8\theta_{XI} = \left\{\left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$ ახლა თუ $D_1' = \left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$, მაშინ $R^*(Q_8) = R(D_1')$ და $\left|R^*(Q_8)\right| = \left|R(D_1')\right|$.

ლემა3.2.17. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*(Q_8)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

თეორემა 3.2.1. ვთქვათ

$$D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X,8).$$

თუ სასრული სიმრავლეა და არის $B_X(D)$ ნახევარ-ჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე, მაშინ

$$|R_D| = |R^*(Q_1)| + |R^*(Q_2)| + |R^*(Q_3)| + |R^*(Q_4)| + |R^*(Q_5)| + |R^*(Q_6)| + |R^*(Q_7)| + |R^*(Q_8)|.$$

$\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრულ ბინა-რულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფებისთვის ქვემოთ მოცემული მტკიცება კარგად არის ცნობილი (იხ[7, 8]).

ლემა3.1.1.ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$.

მაშინ D ნახევარმესერის ყველა XI – ქვენახევარმესერებს ამოწურავენ შემდეგი სიმრავლეები:

1) $\{Z_7\},\{Z_6\},\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის 1 დიაგრამა);

2) $\{Z_7,Z_6\},\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_3\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3\},\{Z_6,Z_1\},$
$\{Z_6,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}.$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-2 დიაგრამა);

3) $\{Z_7,Z_6,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},$
$\{Z_7,Z_6,Z_3\},\{Z_7,Z_6,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-3 დიაგრამა);

4) $\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-4 დიაგრამა);

5) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

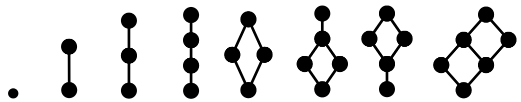
(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-5 დიაგრამა);

6) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. 3.3.1 ნახაზის 6 დიაგრამა);

7) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-7 დიაგრამა);

8) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-8 დიაგრამა);

D ნახევარმესერის ყველა XI – ქვენახევარმესერების დიაგრამები გამოსახულია ნახ. 3.3.1-ში .



7

ნახ. 3.3.1

განმარტება3.3.1. ვთქვათ, D არის რომელიღაც გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერი, $\alpha\in B_X\left(D\right)$ და $Y_T^\alpha=\{x\in X\mid x\alpha=T\}$. თუ $V\left[\alpha\right]=V\left(X^*,\alpha\right)$, როცა $\varnothing\notin D$,

BATUMI SHOTA RUSTAVELI STATE UNIVERSITY
FACULTY OF PHYSICS-MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

with the right of manuscript

Alexander Bakuridze

COMPLETE SEMIGROUPS OF BINARY RELATIONS DEFINED BY SEMILATTICES OF $\Sigma_1\left(X,2\right)$, $\Sigma_1\left(X,3\right)$ AND $\Sigma_4\left(X,8\right)$

This dissertation is submitted for the degree of Academic Doctor of Mathematics
Anotation

Speciality-Mathematics

BATUMI
2017

Semilattices of The Class $\Sigma_4(X,8)$. International Journal of Engineering Science and Innovative Technology , vol. 4, issue 4, July 2015. www.ijiset.com;

4. Alexander Bakuridze. Generated Sets of The Complete Semigroup Binary Relations Defined by Semilattices of The $\Sigma_1(X,2)$. International Journal of Innovative Science Engineering and Technology, vol. 5, Issue 6, November 2016. www.ijiset.com;
5. Yasha Diasamidze, Omar Givradze And Alexander Bakuridze Generated Sets of The Complete Semigroup Binary Relations Defined By Semilattices of The $\Sigma_1(X,3)$. International Journal of Innovative Science Engineering and Technology, vol. 5, issue 6, November 2016. www.ijiset.com;

$V[\alpha]=V(X^*,\alpha)$, როცა $\varnothing\in V(X^*,\alpha)$,

$V[\alpha]=V(X^*,\alpha)\cup\{\varnothing\}$, როცა $\varnothing\notin V(X^*,\alpha)$ და $\varnothing\in D$,

მაშინ ცხადია, ყოველთვის შესაძლებელია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების წარმოდგენა შემდეგი სახით:

$\alpha=\bigcup_{T\in V[\alpha]}(Y_T^\alpha\times T)$.შემდეგში α ბინარული მიმართების ასეთ წარმოდგენას ვუწოდებთ კვაზინორმალურ წარმოდგენას.

შევნიშნოთ, რომ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენისათვის Y_T^α სიმრავლეები შეიძლება ყველა არ განსხვავდებოდნენ ცარიელი სიმრავლისაგან, მაგრამ ასეთი წარმოდგენისათვის ყოველთვის სრულდება შემდეგი პირობა:

a) $Y_T^\alpha\cap Y_{T'}^\alpha=\varnothing$ ნებისმიერი $T,T'\in D$-თვის, $T\neq T'$; **b)** $X=\bigcup_{T\in V[\alpha]}Y_T^\alpha$

თეორემა3.3.1.ვთქვათ $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, წარმოდგენილი ქვემოთ მოცემული კვაზინორმალური ფორმებიდან ერთ-ერთი სახით, არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, თუ არსებობსსრული φ $\alpha-$იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერიდან D ნახევარმესერისრომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიცა კმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

a) $\alpha=X\times T$, რომელიღაც $T\in D$ ელემენტისათვის;

b) $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$, რომელიღაც

$T,T'\in D,T\subset T',Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\},Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T),Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

ელემენტებისათვის;

c) $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T''}^\alpha\times T'')$,

რომელიღაც

$$T,T',T''\in D,T\subset T'\subset T'',Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,\notin\{\varnothing\},Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T),$$
$$Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T'),Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing,Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing;$$

ელემენტებისათვის;

d) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right),$

რომელიღაც

$$T,T',Z\in D,Z_7\subset T\subset T'\subset\breve{D},Y_7^\alpha,Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\},$$
$$Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7),Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T),Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T'),$$
$$Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing,Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing,Y_0^\alpha\cap\varphi\left(\breve{D}\right)\neq\varnothing,$$

ელემენტებისათვის;

e) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{T'\cup Z}^\alpha\times(T'\cup Z)\right)$

რომელიღაც

$$T,T',Z\in D,T\subset T',T\subset Z,T'\setminus Z\neq\varnothing,Z\setminus T'\neq\varnothing,$$
$$Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_Z^\alpha\notin\{\varnothing\},Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T'),Y_T^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z),$$
$$Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing,Y_Z^\alpha\cap\varphi(Z)\neq\varnothing;$$

ელემენტებისათვის;

f) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$

რომელიღაც

$$Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_4^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\},Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6),Y_7^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq\varphi(Z_4),$$
$$Y_6^\alpha\cap\varphi(Z_6)\neq\varnothing,Y_4^\alpha\cap\varphi(Z_4)\neq\varnothing,Y_0^\alpha\cap\varphi\left(\breve{D}\right)\neq\varnothing;$$

ელემენტებისათვის;

g) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$

რომელიღაც

$$Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_3^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\},Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6),Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3),$$
$$Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1),Y_6^\alpha\cap\varphi(Z_6)\neq\varnothing,Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing,Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing;$$

ელემენტებისათვის;

) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right),$

რომელიღაც

$$Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_4^\alpha,Y_3^\alpha\notin\{\varnothing\},Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7),Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6),Y_7^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq\varphi(Z_4),$$
$$Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3),Y_6^\alpha\cap\varphi(Z_6)\neq\varnothing,Y_4^\alpha\cap\varphi(Z_4)\neq\varnothing,Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing;$$

ელემენტებისათვის.

თეორემა3.3.2. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარულ ელემენტთა R_D სიმრავლე წარმოადგენს ამ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფს.

ნაშრომის შედეგების აპრობაცია

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები ასახულია შემდეგ ქართულ და უცხოურ საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალებში.

სადისერტაციო ნაშრომის წინასწარი განხილვა შედგა ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის გაფართოებულ სხდომაზე, სადაც იგი მოწონებული და რეკომენდებული იქნა დაცვისთვის.

დანართი

სადისერტაციო ნაშრომს ბოლოში ერთვის 4 დანართი. ოთხივე დანართში მოცემულია მაგალითები, რომლებშიც სასრული X სიმრავლის შემთხვევაში აგებულია მოცემული კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები და ნაჩვენებია, რომ თეორიული და პრაქტიკული გამოთვლები ერთმანეთს ემთხვევა.

შრომები

1. Ya. Diasamidze And A. Bakuridze. Idempotent Elements Of The Semigroups Of Binary Relations Defined By Semilattices Of The Class $\Sigma_4(X,8)$. Proceedings of A. Razmadze Mathematical institute, vol. 166 (2014), pp. 9–30.
2. Ya. Diasamidze And A. Bakuridze. Regular Elements of The Semigroup $B_X(D)$ Defined By Semilattices of The Class $\Sigma_4(X,8)$ and Their Calculation. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, vol. 165 (2014), pp. 41–66.
3. Yasha Diasamidze And Alexander Bakuridze. On Some Properties of Regular Elements of Complete Semigroups Defined By