ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ალექსანდრე ბაკურიძე

$\sum_1(X,2)$, $\sum_1(X,3)$ და $\sum_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები

(დისერტაცია წარდგენილია სადოქტორო ხარისხის მოსაპოვებლად)

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

პროფესორი იაშა დიასამიძე

ბათუმი-2017

შინაარსი

შესავალი

1.თემის აქტუალობა. ნახევარჯგუფი არის არაცარიელი სიმრავლე, განხილული მასში განსაზღვრული ბინარული ალგებრული ოპერაციის მიმართ. როგორც ფელიქს კლეინი მიუთითებს, ჯერ კიდევ იმ პერიოდში, როდესაც ჯგუფთა თეორია ყალიბდებოდა, იყო ვარაუდი, რომ ძირითად საწყის ცნებად აღებულიყო ის, რასაც დღეს ნახევარჯგუფს ვუწოდებთ. თუმცა მათემატიკის განვითარების იმ ეტაპზე გადაწყვიტეს შეჩერებულიყვნენ შემდეგ ცნებაზე - ჯგუფებზე.

ერთ-ერთი როლი, რომელსაც ჯგუფთა თეორია თამაშობდა მათემატიკის შემდგომ განვითარებაში იყო ის, რომ თავისი არსით ჯგუფთა ალგებრული თეორია წარმოადგენდა აბსტრაქტულ თეორიას შებრუნებად გარდაქმნათა შესახებ. ასეთ გარდაქმნათა განხილვები გვხვდება მათემატიკურ (და არა მარტო მათემატიკურ) დისციპლინებში.

ნახევარჯგუფი ესაა სიმრავლე ერთი ბინარული ალგებრული ოპერაციით, რომელიც ასოციაციურობის კანონს აკმაყოფილებს. ტერმინი „ნახევარჯგუფი" მათემატიკურ ლიტერატურაში პირველად გაჩნდა სეგიეს წიგნში. ნახევარჯგუფებში პირველ შრომას წარმოადგენს 1905 წელს გამოქვეყნებული დიკსონის სტატია. თეორიის განვითარება არსებითად დაიწყო 1928 წელს, როცა გამოქვეყნდა ა.კ. სუშკევიჩის ძალიან მნიშვნელოვანი სტატია. მან აჩვენა, რომ (თუ ვისარგებლებთ თანამედროვე ტერმინოლოგიით) ყოველი სასრულო ნახევარჯგუფი შეიცავს „ბირთვს" (ე.ი. მარტივ იდეალს) და სრულყოფილად განსაზღვრა სასრულო მარტივი იდეალების აგებულება.

სუშკევიჩის აღნიშნულ შედეგს გამოსაყენებლად მეტად მოუხერხებელი ფორმა ჰქონდა. ეს დეფექტი გამოასწორა რისიმ (Rees) 1940 წელს ნულის მქონე ჯგუფზე მატრიცის ცნების შემოტანით. გარდა ამისა, მის მიერ შესწავლილი იქნა ნახევარჯგუფთა მნიშვნელოვანი „პრიმიტიული იდემპოტენტის მქონე მარტივი ნახევარჯგუფების" კლასი.

ნახევარჯგუფთა თეორიის ბევრ საკითხთა გამოკვლევებში პრინციპიალურ როლს გრინის ეკვივალენტობის მიმართებები ასრულებს. შეზღუდვები შეიძლება მიეკუთვნებოდეს წარმომქმნელთა სისტემებს და მათი ტიპები გამოყოფილ იქნას წარმომქმნელ ელემენტთა ხასიათის თვალსაზრისით (მაგ. იდემპოტენტები; ყოველი

ნახევარჯგუფი ჩაიდგმება იდემპოტენტებით წარმოქმნილ ნახევარჯგუფებში). წარმომქმნელ ელემენტთა ურთიერთდამოკიდებულების თვალსაზრისით შეისწავ-ლება ნახევარჯგუფები, რომლებიც მოცემულია განმსაზღვრელი თანაფარდობებით.

ნახევარჯგუფთა თეორიაში მნიშვნელოვანი შედეგებისა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფებთანაა დაკავშირებული.

ბინარული მიმართების ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. ამის დასადასტურებლად საკმარისია ითქვას, რომ ერთი სიმრავლის მეორე სიმრავლეზე ასახვა ბინარული მიმართების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს. ასევე ბინარულ მიმა-რთებათა თეორიის გეომეტრიულ სახეს გრაფთა თეორია წარმოადგენს, თუმცა ამ უკანასკნელისაგან იზოლირებულად განიხილება, რადგანაც გრაფთა თეორია ბინა-რულ მიმართებათა თვისებებს ამ თეორიის სპეციალური გამოყენებისათვის შეის-წავლის.

ბინარულ მიმართებათა ენა გამოსაყენებლად მოსახერხებელია მათემატიკურ ლინგვისტიკაში, მათემატიკურ ბიოლოგიაში და გამოყენებითი მათემატიკის სხვა-დასხვა დარგებში, მაგალითად, ბინარულ მიმართებათა თეორიას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს ავტომატთა თეორიაში. კერძოდ, ყოველი სასრული უნივერსალური ავტომატი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას როგორც მონიშნული ორიენტირებული გრაფი, რომელსაც მდგომარეობის დიაგრამა ეწოდება.

ბინარულ მიმართებათა თეორია შექმნილია მათემატიკური ლოგიკის მო-თხოვნის საფუძველზე და მისი არსებობის პირველ ეტაპზე მთლიანად მათემატიკურ ლოგიკას ემსახურებოდა. ბინარულ მიმართებათა თეორიის საწყისი ცნებები, მეცხრამეტე საუკუნის ბოლოს პირველად შემოტანილი იქნა დე მორგანის, პირსისა და ფრეგეს მიერ. შემდეგ ამ თეორიის სისტემატურ ჩამოყალიბებასა და მოდერ-ნიზაციაში დიდი როლი შეასრულეს შრედერმა და რიგემ.

ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის შესწავლის სირთულე არის ის, რომ ისინი როგორც წესი არ წარმოადგენენ რეგულარულ ნახევარჯგუფებს, რაც აძნელებს მათ შესწავლას. ამასთან დაკავშირებით მეტად საინტერესო აღმოჩნდა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფებისა და მათი ზოგიერთი მნიშვნელოვანი კლასების სისტემატური შესწავლა გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერების გამოყენებით, რომელიც პირველად გამოყენებული იქნა იაშა დიასამიძის მიერ თავის სადისერ-

ტაციო ნაშრომში (იხ. [68]). ეს არის ახალი მიმართულება, რომელსაც წარმოდგენილი მონოგრაფია ეძღვნება. მოკლედ აღვწეროთ ეს მეთოდი:

კერძოდ, D სიმბოლოთი აღვნიშნოთ არა ცარიელი X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი არა ცარიელი სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია D სიმრავლის ელემენტების თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციის მიმართ. მას გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერი ეწოდება. f იყოს X სიმრავლის D სიმრავლეში ნებისმიერი ასახვა. ყოველ ასეთ f ასახვას შევუსაბამოთ $\alpha_f = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x) \right)$ ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე. ყველა ასეთი $\alpha_f \left(f : X \to D \right)$ ბინარული მიმართებების სიმრავლე აღვნიშნოთ $B_X(D)$ სიმბოლოთი. მტკიცდება, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფია. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი ეწოდება.

ნახევარჯგუფთა თეორიაში ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნახევარჯგუფი შეიძლება ბინარულ მიმართებათა რაიმე ნახევარჯგუფში ჩაიდგას და ამიტომ ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფების ქვენახევარჯგუფთა განხილვისას ზოგადად ნახევარჯგუფები შეისწავლება. გარდა ამისა, ნახევარჯგუფების იდემპოტენტები, რეგულარული ელემენტები, ცალმხრივი ერთეულები, განმსაზღვრელი თანაფარდობები, დაუყვანი და გარე ელემენტები ნახევარჯგუფთა აბსტრაქტული თვისებების შესწავლაში განსაკუთრებით მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ.

ვთქვათ, D m სიმძლავრის გაერთიანების სრული X - ნახევარმესერია; $B_X(D)$ - D გაერთიანების სრული X -ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ბევრი აბსტრაქტული თვისება D ნახევარმესერთან მჭიდროდაა დაკავშირებული.

გაერთიანების სრული X - ნახევარმესერი, რომელსაც ფიქსირებული დიაგრამა გააჩნია და ცარიელ სიმრავლეს შეიცავს, ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების ისეთ განსაზღვრულ კლასს განსაზღვრავს, რომ მასში მოცემულ ნახევარჯგუფთან ერთად მის იზომორფულ ნებისმიერ ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფს ყოველთვის შეიცავს. ამ კლასის ნახევარჯგუფთა თვისებები მჭიდროდაა დაკავშირებული იმ ნახევარმესერთა ელემენტების თვისებებზე, რომლებიც მოცემულ ნახევარჯგუფს განსაზღვრავენ. ეს თვისებებია: იკვეთებიან თუ არა მოცემული

ნახევარმესერის წარმომქმნელი სიმრავლის ელემენტები; მათი ელემენტები ქმნიან თუ არა ჯაჭვს და ა.შ.

გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერების გამოყენებით ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების შესწავლაში და მიღებული შედეგების გავრცელების საქმეში დიდი წვლილი აქვს შეტანილი შ. მახარაძეს.

ამ მიმართულებით ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა ხარისხები დაიცვეს ზებური ავალიანმა, გულადი ფარტენაძემ, ომარი გივრაძემ და ნ. როყვამ. მათემატიკის აკადემიური დოქტორის ხარისხები თურქეთის რესპუბლიკაში დაიცვეს დიდემ იეშილმა და ბარიშ ალბაირაკმა. დღეისათვის ამ ტიპის ნახევარჯგუფებზე 60-ზე მეტი ნაშრომია მიძღვნილი.

ზებურ ავალიანს შესწავლილი აქვს $\Sigma_1(X,5)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 1);

გულადი ფარტენაძეს შესწავლილი აქვს $\Sigma_1(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 2);

ომარ გივრაძეს შესწავლილი აქვს $\Sigma_1(X,4)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 3);

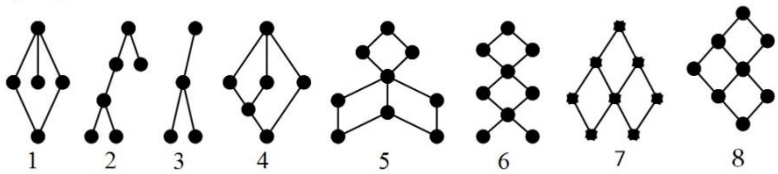
ნინო როყვას შესწავლილი აქვს $\Sigma_3(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 4);

დიდემ იეშილს შესწავლილი აქვს $\Sigma_2(X,9)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 5);

ბარიშ ალბაირაქს შესწავლილი აქვს $\Sigma_1(X,9)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 6).

ნინო ცინარიძეს შესწავლილი აქვს $\mathbf{\Sigma_2(X,8)}$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 7).

გიული თავდგირიძეს შესწავლილი აქვს აქვს $\mathbf{\Sigma_3(X,8)}$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 8).



2. ნაშრომის მიზნები, ამოცანები და შედეგები

სადისერტაციო ნაშრომის **ძირითადი მიზანია** $\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების ისეთი თვისებების შესწავლა, რომლებიც ინახებიან იზომორფიზმის დროს.

კვლევის საგანს წარმოადგენს $\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერები, აგრეთვე კვლევის საგანს წარმოადგენენ მოცემული ნახევარმესერებით განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები.

მეცნიერული სიახლე და ძირითადი შედეგები. ნაშრომში პირველად განიხილება $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის კლასები, მოცემული კლასის ნახევარმესერების თვისებები გამოკვლეულია შესაბამისი დიაგრამის მიხედვით.

სასრული X სიმრავლის შემთხვევაში, გამოყვანილია $\Sigma_4(X,8)$ კლასში ნახევარმესერების რაოდენობის დათვლის ფორმულა, აღწერილია მოცემული კლასის ყველა ქვენახევარმესერები და ამასთანავე მათგან გამოყოფილია $XI-$ქვენახევარმესერები. შესწავლილია $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ყოველი D ნახევარმესერით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური, რეგულარული ელემენტები და მათი თვისებები. იმ შემთხვევაში როცა X სასრული სიმრავლეა, გამოყვანილია იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტების რაოდენობის დათვლის ფორმულები.

მოცემული საკითხების შესწავლა მთლიანად ეყრდნობა გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერის ძირითად თვისებებს. ნაშრომში მიღებულმა შედეგებმა მოგვცა იმის საშუალება, რომ ვისაუბროთ ამ ნახევარჯგუფის უამრავ თვისებაზე. კერძოდ, აქვს თუ არა მას მარჯვენა ერთეულები, როგორ არის აგებული მისი იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები. ეს შესაძლებელია მოცემული ნახევარჯგუფის განმსაზღვრელი ნახევარმესერის შესაბამის დიაგრამაზე დაყრდნობით.

კვლევის ზოგადი მეთოდიკა. ცნობილია, რომ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები, ცალმხრივი ერთეულები, რეგულარული ელემენტები, მაქსიმალური ქვეჯგუფები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ნახევარჯგუფთა აბსტრაქტული თვისებების (ე.ი., ისეთი თვისებების, რომლებიც ინახებიან იზომორფიზმის დროს), შესწავლაში.

სადისერტაციო ნაშრომში ნახევარჯგუფთა თვისებების შესწავლა ხდება ნახევარმესერთა თვისებების საშუალებით. ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარ-

ჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების მნიშვნელოვანი ნაწილი ძირითადად განისაზღვრება იმ გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერებით, რომლებიც განსაზღვრავენ მოცემული კლასის ელემენტებს.

ნაშრომში გამოიყენება მესერთა თეორიის, ნახევარჯგუფთა თეორიის, სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ზოგადი მეთოდი.

3. დისერტაციის სტრუქტურა და მოცულობა.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, 3 თავის, ამ თავებში შემავალი 8 პარაგრაფისა და 4 დანართისაგან. ნაშრომის საერთო მოცულობა არის კომპიუტერით დაკაბადონებული 197 გვერდი (მათგან 152 გვერდი ნაშრომის ძირითადი ნაწილია, დანარჩენი კი დამატებები).

4. ძირითადი აღნიშვნები

შემოვიღოთ ძირითადი აღნიშვნები, რომლებიც შემდგომში დისერტაციაშია გამოყენებული.

სიმბოლო $\varnothing$-ით აღვნიშნოთ ცარიელი ბინარული მიმართება ან X სიმრავლის ცარიელი ქვესიმრავლე;

$B_X(D)=\{\alpha_f \mid f: X\to D\}$;

$(x,y)\in\alpha$ პირობას შემდგომში ჩავწერთ შემდეგი ფორმით $x\alpha y$;

ახლა ვთქვათ $(x,y)\in X,\ Y\subseteq X,\ \alpha\in B_X(D),\ T\in D,\ \varnothing\neq D'\subseteq D$, $t\in\breve{D}=\bigcup_{Y\in D}Y$ ($\breve{D}$ არის D სიმრავლის უდიდესი ელემენტი). შემოვიღოთ აგრეთვე შემდეგი აღნიშვნები:

$y\alpha=\{x\in X \mid y\alpha x\}$;

$Y\alpha=\bigcup_{y\in Y}y\alpha$;

$V(D,\alpha)=\{Y\alpha \mid Y\in D\}$;

$X^*=\{T \mid \varnothing\neq T\subseteq X\}$;

$D'_t=\{Z'\in D' \mid t\in Z'\}$;

$Y_T^\alpha=\{x\in X \mid x\alpha=T\}$;

$D'_T=\{Z'\in D' \mid T\subseteq Z'\}$;

$\ddot{D}'_T=\{Z'\in D' \mid Z'\subseteq T\}$;

$l(D',T)=\cup(D'\setminus D'_T)$;

$\wedge(D,D_t)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ D_t სიმრავლის ქვედა საზღვრების სიმრავლე D ნახევარმესერში.

თავი I

$\Sigma_1(X,2)$ და $\Sigma_1(X,3)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების წარმომქმნელი სისტემები

მოცემულ ნაშრომში განხილულია $\Sigma_1(X,2)$ და $\Sigma_1(X,3)$ კლასების D გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების წარმომქმნელი სისტემები.

ჩამოვაყალიბოთ რამდენიმე განმარტება, ლემა და თეორემა.

განმარტება 1.0.1 იტყვიან, რომ S ნახევარჯგუფის α ელემენტს ეწოდება გარე ელემენტი, თუ ნებისმიერი $\alpha_1,\alpha_2\in S\setminus\{\alpha\}$-თვის, ადგილი აქვს შემდეგს: $\alpha_1\cdot\alpha_2\neq\alpha$.

(იხ. განმარტება 1.15.1)

წინადადება 1.0.1 ვთქვათ $\alpha,\beta\in B_X(D)$, მაშინ $\alpha\circ\beta=\alpha\circ\overline{\beta}=\alpha\circ\tilde{\beta}$.

(იხ. [2] წინადადება 2.)

ლემა 1.0.1. S ნახევარჯგუფის გარე ელემენტებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) თუ S ნახევარჯგუფის რომელიმე მარჯვენა ერთეული წარმოადგენს გარე ელემენტს, მაშინ S ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეული წარმოადგენს გარე ელემენტს;

b) თუ S' არის S ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლე, მაშინ სიმრავლე $S''=S\setminus S'$ არის S ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფი;

c) თუ S' არის S ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლე და A არის S ნახევარჯგუფის წარმომქნელთა სისტემა, მაშინ $S'\subseteq A$;

d) თუ φ არის S ნახევარჯგუფის S_1 ნახევარჯგუფზე იზომორფული ასახვა და S' არის S ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლე, მაშინ $\varphi(S')$ იქნება S_1 ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლე.

(იხ. ლემა 1.15.1)

თეორემა 1.0.1. ვთქვათ $\alpha, \beta \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფში α ბინარული მიმართება მარჯვნიდან იყოფა β ბინარულ მიმართებაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$V\left(X^*, \alpha\right) \subseteq V\left(D, \beta\right).$$

(იხ. თეორემა 4.1.1)

თეორემა 1.0.2 $k^0_{n,m}$ რიცხვისთვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$k^0_{n,m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{m+i}}{(i-1)!(m-i)!} \cdot i^{n-1}$$

(იხ. თეორემა 1.17.1)

1.1 $\Sigma_1(X,2)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების წარმომქმნელი სისტემები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია $\Sigma_1(X,2)$ კლასის D გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების წარმომქმნელი სისტემები.

ვთქვათ, $x, y \in X$, $Y \subseteq X$, $\alpha \in B_X(D)$, $\breve{D} = \bigcup_{Y \in D} Y$ და $T \in D$.

მაშინ $y\alpha$, $Y\alpha$, $V(D,\alpha)$, X^* და $V\left(X^*, \alpha\right)$ სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$\begin{aligned}
&y\alpha = \{x \in X \mid y\alpha x\},\\
&Y\alpha = \bigcup_{y \in Y} y\alpha,\\
&X^* = \{Y \mid \varnothing \neq Y \subseteq X\},\\
&V\left(X^*, \alpha\right) = \{Y\alpha \mid \varnothing \neq Y \subseteq X\},\\
&D_T = \{Z \in D \mid T \subseteq Z\}.
\end{aligned}$$

ცნობილია შემდეგი მტკიცებულებები:

თეორემა 1.1.1 *ვთქვათ,* $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, ..., Z_{m-1}\}$ *ნებისმიერი გაერთიანებათა სრული* $X-$ *ნახევარმესერია და* $C(D) = \{P_0, P_1, P_2, ..., P_{m-1}\}$ *არის* X *სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ქვესიმრავლეთა რაღაც ოჯახი (ცარიელი* $\varnothing$ *სიმრავლე შეიძლება*

რამდენჯერმე განმეორდეს). თუ φ არის ასახვა D ნახევარმესერისა სიმრავლეთა $C(D)$ ოჯახზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{m-1} \\ P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{m-1} \end{pmatrix}$$

და $\hat{D}_Z = D \setminus D_T$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} \breve{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_{m-1} \\ Z_i &= P_0 \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_{Z_i}} \varphi(T) \end{aligned} \qquad (1.1.1)$$

შემდეგში ამ ტოლობებს ვუწოდებთ ფორმალურ ტოლობებს.

დამტკიცებულია, რომ თუ D ნახევარმესერის ელემენტები წარმოდგენილია (1.1.1) სახით, მაშინ P_i $(0 < i \le m-1)$ სიმრავლეებს შორის არსებობს ისეთი, რომელიც ვერ იქნება D-თვის ცარიელი სიმრავლე. ასეთ P_i სიმრავლეს ეწოდება ბაზისური წყარო, ამავე დროს ისეთ P_j $(0 \le j \le m-1)$ სიმრავლეს, რომელიც შეიძლება იყოს ცარიელი სიმრავლე, ეწოდება სისავსის წყარო. დამტკიცებულია, რომ φ ასახვისას ბაზისურ წყაროს დამფარავ ელემენტთა რაოდენობა ყოველთვის ერთის ტოლია, ხოლო სისავსის წყაროს დამფარავი ელემენტები ან არ არსებობენ, ან მათი რაოდენობა მეტია 1-ზე (იხ [1],თავი 11).

ვთქვათ, $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ იყოს ფორმალური ტოლობების პარამეტრები, $\beta \in B_X(D)$ და

$$\overline{\beta} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \left(P_i \times \bigcup_{t \in P_i} t\beta \right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times t'\beta \right). \qquad \ldots(1.1.2)$$

$\overline{\beta}$ მიმართებას ეწოდება β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენა.

თუ $\overline{\beta}$ არის β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენა, მაშინ $\overline{\beta}$ ბინარული მიმართებისთვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) $\overline{\beta} \in B_X(D)$;

b) $\beta \subseteq \overline{\beta}$;

c) β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენა არის კვაზინორმალური;

d) თუ

$$\overline{\beta}_1=\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_{m-1} \\ P_0\overline{\beta} & P_1\overline{\beta} & \dots & P_{m-1}\overline{\beta} \end{pmatrix},$$

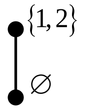
მაშინ $\overline{\beta}_1$ არის ასახვა $C(D)=\{P_0,P_1,P_2,\dots,P_{m-1}\}$ სიმრავლეთა ოჯახისა $D=\{\breve{D},Z_1,Z_2,\dots,Z_{m-1}\}\cup\{\varnothing\}$ სისტემაზე;

e) თუ $\overline{\beta}_2 : X\setminus\breve{D}\to D$ არის ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\overline{\beta}_2(t')=t'\beta$ ყოველი $t'\in X\setminus\breve{D}$-თვის, მაშინ

$$\overline{\beta}=\bigcup_{i=0}^{m-1}\left(P_i\times\bigcup_{t\in P_i}t\beta\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{D}}\left(\{t'\}\times\overline{\beta}_2(t')\right).$$

შევნიშნოთ, რომ თუ P_j $(0\le j\le m-1)$ არიან ისეთი სისავსის წყაროები, რომ $P_j=\varnothing$, მაშინ ყოველთვის სრულდება ტოლობა $P_j\overline{\beta}=\varnothing$. ასევე არსებობს ისეთი ბაზისური წყაროები P_i $(0\le i\le m-1)$, რომლისთვისაც $\bigcup_{t\in P_i}t\beta=\varnothing$, ე.ი. $P_i\overline{\beta}=\varnothing$.

მაგალითი 1.1.1. ვთქვათ $X=\{1,2,3,4\}$, $D=\{\varnothing,\{1,2\}\}$, მაშინ $P_0=\varnothing$, $P_1=\{1,2\}$. თუ



ნახ.1. 1.1

$$\beta=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(4,1),(4,2)\}$$

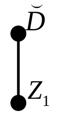
მაშინ $\beta\in B_X(D)$ და β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}&\overline{\beta}_1=\begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ \varnothing & \{1,2\}\end{pmatrix},\ \overline{\beta}_2=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \varnothing & \{1,2\}\end{pmatrix},\\ &\overline{\beta}=(\varnothing\times\varnothing)\cup(\{1,2\}\times\{1,2\})\cup\\ &\quad\cup(\{3\}\times\varnothing)\cup(\{4\}\times\{1,2\})=\\ &\quad=(P_0\times\varnothing)\cup(P_1\times\{1,2\})\cup\\ &\quad\cup(\{3\}\times\varnothing)\cup(\{4\}\times\{1,2\}),\end{aligned}$$

სადაც P_1 ბაზისური წყაროა და P_0 სისავსის წყარო.

თეორემა 1.1.2 *ვთქვათ* $\alpha,\beta\in B_X(D)$, *მაშინ* $\alpha\circ\beta=\alpha\circ\overline{\beta}$ (იხ. წინადადება 1.0.1).

2.1 ვთქვათ, $\Sigma_1(X,2)$ არის გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერთა ისეთი კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი იზომორფულია $D=\{Z_1,\breve{D}\}$ გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერისა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $Z_1\subset\breve{D}$ (იხ. ნახ.1. 1.1).



ნახ.1. 1.1

ვთქვათ, $C(D)=\{P_0,P_1\}$, სადაც

$P_0,P_1\subset X$, $P_0\cap P_1=\varnothing$ და $\varphi=\begin{pmatrix}\breve{D} & Z_1\\ P_0 & P_1\end{pmatrix}$

წარმოადგენს ასახვას D ნახევარმესერისა $C(D)$ სიმრავლეზე. მაშინ D ნახევარმესერის ფორმალურ ტოლობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}\breve{D}&=P_0\cup P_1,\\ Z_1&=P_0,\end{aligned} \qquad ...(1.1.3).$$

სადაც P_1 D ნახევარმესერის ბაზისური წყაროა და P_0 სისავსის წყარო. გამომდინარე აქედან $|X|\geq 1$.

ლემა 1.1.1 *ვთქვათ,*

$$D=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1\left(X,2\right),$$

$$B=\left\{\alpha\in B_X\left(D\right)|V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\}.$$

თუ $B\neq\varnothing$, მაშინ B არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $D=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1\left(X,2\right)$, $\alpha\in B$ და $\alpha=\delta\circ\beta$ რომელიღაც $\delta,\beta\in B_X(D)\setminus\{\alpha\}-$თვის. მაშინ δ ელემენტის კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta=\left(Y_1^\delta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_1^\delta\cup Y_0^\delta=X$ და $Y_1^\delta\cap Y_0^\delta=\varnothing$. თეორემა 1.1.2-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha=\delta\circ\beta=\delta\circ\overline{\beta},$$

სადაც $\overline{\beta}$ წარმოადგენს β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალურ წარმოდგენას. მარტივად დასანახია, რომ

$$\alpha=\delta\circ\overline{\beta}=\left(Y_1^\delta\times Z_1\overline{\beta}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\overline{\beta}\right). \qquad ...(1.1.4)$$

$\alpha=\delta\circ\overline{\beta}$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$D=V\left(X^*,\alpha\right)\subseteq V\left(D,\overline{\beta}\right)$$

(იხ [1], თეორემა 3.0.1). ასე, რომ $D=V\left(D,\overline{\beta}\right)$.

დაშვების თანახმად $\alpha\in B$, ე.ი. არსებობს α ელემენტის კვაზინორმალური წარმოდგენა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე: $\alpha=\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $\left|Y_i^\alpha\right|\geq 1$

ნებისმიერი $i=0,1$, რადგანაც $\alpha\in B$ (თუ $Y_j^\delta=\varnothing$ რომელიმე j-თვის $(0\le j\le 1)$, მაშინ $V\left(X^*,\alpha\right)\neq D$), ე.ი. $|X|\ge 2$.

Z_1 ელემენტისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

a) $Z_1=\varnothing$. ამ შემთხვევაში გვექნება, რომ

$$P_0=\cap D=\varnothing$$

და

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}\varnothing & P_1\\ \varnothing & \varnothing\end{pmatrix},\ \gamma_2=\begin{pmatrix}\varnothing & P_1\\ \varnothing & \breve{D}\end{pmatrix}$$

არიან $\{\varnothing,P_1\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ასახვები D ნახევარმესერში, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $\gamma_i(\varnothing)=\varnothing\ (i=1,2)$.

თუ $X=\breve{D}$, მაშინ (1.1.3) ფორმალური ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\varnothing\cup P_1=\breve{D}$. ამ შემთხვევაში

$$\begin{aligned}&P_0=\varnothing,\\&P_1=\breve{D},\\&X\setminus\breve{D}=\varnothing,\\&\overline{\beta}=(\varnothing\times\varnothing)\cup\left(P_1\times\breve{D}\right)\cup\varnothing=X\times\breve{D},\end{aligned}$$

(იხ. ტოლობა (1.1.2)). მარტივი დასანახია, რომ $V\left(D,\overline{\beta}\right)=D$ და

$$\begin{aligned}\alpha=\delta\circ\overline{\beta}&=\left(\left(Y_1^\delta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)\right)\circ(X\times D)=\\&=\left(\left(Y_1^\delta\times Z_1\right)\circ(X\times D)\right)\cup\left(\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)\circ(X\times D)\right)=\\&=\left(Y_1^\delta\times\breve{D}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)=X\times\breve{D}\notin B\end{aligned}$$

ვინაიდან $V\left(X^*,\alpha\right)=\left\{\breve{D}\right\}\neq D$. ასე, რომ $X\neq\breve{D}$.

შემდეგში ნაგულისხმევია, რომ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\ge 1$.

$\gamma_i\ (i=1,2)$ ბინარული მიმართებებისთვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

ვთქვათ, $\gamma_1=\begin{pmatrix}\varnothing & P_1\\ \varnothing & \varnothing\end{pmatrix}$. (1.1.3) ფორმალური ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $P_1=\breve{D}\neq\varnothing$. თუ $\overline{\gamma}_1$ არის $X\setminus\breve{D}$ სიმრავლის ასახვა $D\setminus\{\varnothing\}=\left\{\breve{D}\right\}$ სიმრავლეზე (ზემოთ აღნიშნულის თანახმად $\left|X\setminus\breve{D}\right|\ge 1$), მაშინ

$$\overline{\beta} = (P_1 \times \varnothing) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\gamma}_1(t') \right), \qquad ...(1.1.5)$$

$V\left(D, \overline{\beta}\right) = D$ (იხ. ტოლობა (1.1.2)). ფორმალური (1.1.3) ტოლობებიდან და (1.1.4), (1.1.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned}
&Z_1\overline{\beta} = \varnothing\overline{\beta} = \varnothing, \\
&\breve{D}\overline{\beta} = \varnothing\overline{\beta} \cup P_1\overline{\beta} = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing, \\
&\alpha = \delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\overline{\beta}\right) = \\
&\quad = \left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \varnothing\right) = X \times \varnothing = \varnothing \notin B
\end{aligned}$$

ვინაიდან $V\left(X^*, \alpha\right) = \{\varnothing\} \neq D$.

ვთქვათ $\gamma_2 = \begin{pmatrix} \varnothing & P_1 \\ \varnothing & \breve{D} \end{pmatrix}$ და $\overline{\gamma}_2$ არის $X \setminus \breve{D}$ სიმრავლის ასახვა $D \setminus \left\{\breve{D}\right\}$ ნახევარმესერზე. ასე, რომ თუ

$$\overline{\beta} = \left(P_1 \times \breve{D}\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\gamma}_2(t') \right), \qquad ...(1.1.6)$$

მაშინ $V\left(D, \overline{\beta}\right) = D$, ფორმალური (3.1.3) ტოლობიდან და ტოლობებიდან (1.1.4), (1.1.6) გვექნება:

$$\begin{aligned}
&Z_1\overline{\beta} = \varnothing\overline{\beta} = \varnothing, \\
&\breve{D}\overline{\beta} = \varnothing\overline{\beta} \cup P_1\overline{\beta} = \varnothing \cup \breve{D} = \breve{D}, \\
&\alpha = \delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_1^{\delta} \times Z\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\overline{\beta}\right) = \\
&= \left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right) = \delta.
\end{aligned}$$

მაგრამ, ტოლობა $\alpha = \delta$ ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $\delta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$. ე.ი. ამ შემთხვევაში $\alpha \notin B$.

მოცემულ სიტუაციაში a) შემთხვევიდან გამომდინარეობს, რომ B წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლეს, რადგანაც γ_i $(i = 1, 2)$ ასახვები არიან ყველა შესაძლო ასახვები $\{\varnothing, P_1\}$ სიმრავლიდან D ნახევარმესერში, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\gamma_i(\varnothing) = \varnothing$ პირობას.

b) $Z_1 \neq \varnothing$. მაშინ $P_0 = \cap D \neq \varnothing$ და

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ Z_1 & Z_1 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ Z_1 & \breve{D} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ \breve{D} & Z_1 \end{pmatrix} \text{ და } \sigma_4 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ \breve{D} & \breve{D} \end{pmatrix}$$

არიან ყველა შესაძლო ასახვები $\{P_0, P_1\}$ სიმრავლიდან D ნახევარმესერში.

თუ $X=\breve{D}$ და $\sigma_i(P_0)=\sigma_i(P_1)$ ($i=1,4$), მაშინ ფორმალური (1.1.3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\sigma_i(P_1)=\breve{D}$ და ამ შემთხვევაში $\overline{\beta}=X\times\sigma_i(P_1)$ (იხ. ტოლობა (1.1.2)). ასე რომ,

$$\overline{\beta}=X\times Z_1 \text{ ან } \overline{\beta}=X\times\breve{D}.$$

ორივე შემთხვევაში $V(D,\overline{\beta})=D$ და

$$\begin{aligned}\alpha=\delta\circ\overline{\beta}&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\right)\circ\left(X\times Z_1\right)=\\&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\circ\left(X\times Z_1\right)\right)\cup\left(\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\circ\left(X\times Z_1\right)\right)=\\&=\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times Z_1\right)=X\times Z_1\notin B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha=\delta\circ\overline{\beta}&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\right)\circ\left(X\times\breve{D}\right)=\\&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\circ\left(X\times\breve{D}\right)\right)\cup\left(\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\circ\left(X\times\breve{D}\right)\right)=\\&=\left(Y_1^{\delta}\times\breve{D}\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)=X\times\breve{D}\notin B\end{aligned}$$

ამრიგად $V\left(X^*,\alpha\right)\neq D$. ასე, რომ $X\neq\breve{D}$.

შემდეგში იგულისხმება, რომ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$.

ბინარული σ_i $(i=1,2,3,4)$ მიმართებებისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

ვთქვათ, $\sigma_1=\begin{pmatrix}P_0 & P_1\\ Z_1 & Z_1\end{pmatrix}$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება, რომ $P_0\neq\varnothing$ და $P_1\neq\varnothing$. თუ $\overline{\sigma}_1$ არის ასახვა $X\setminus\breve{D}$ სიმრავლისა $D\setminus\{Z_1\}=\{\breve{D}\}$ სიმრავლეზე (დაშვების თანახმად $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$), მაშინ

$$\overline{\beta}=\left(\left(P_0\cup P_1\right)\times Z_1\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{D}}\left(\{t'\}\times\overline{\sigma}_1(t')\right), \qquad \text{...(1.1.7)}$$

$V(D,\overline{\beta})=D$ და ფორმალური (1.1.3) ტოლობებიდან და (1.1.4), (1.1.7) ტოლობებიდან გვექნება:

$$\begin{aligned}&Z_1\overline{\beta}=P_0\overline{\beta}=Z_1,\\&\breve{D}\overline{\beta}=P_0\overline{\beta}\cup P_1\overline{\beta}=Z_1\cup Z_1=Z_1,\\&\alpha=\delta\circ\overline{\beta}=\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\overline{\beta}\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\overline{\beta}\right)=\\&\quad=\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times Z_1\right)=X\times Z_1\notin B\end{aligned}$$

ამრიგად $V\left(X^*,\alpha\right)=\{Z_1\}\neq D$.

ვთქვათ $\sigma_2=\begin{pmatrix}P_0 & P_1\\ Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix}$ და $\bar{\sigma}_2$ არის $X\setminus\breve{D}$ სიმრავლის ასახვა D ნახევარმესერში. ასე, რომ თუ

$$\bar{\beta}=\left(P_0\times Z_1\right)\cup\left(P_1\times\breve{D}\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{D}}\left(\{t'\}\times\bar{\sigma}_2\left(t'\right)\right), \qquad ...(1.1.8)$$

მაშინ $V\left(D,\bar{\beta}\right)=D$, ფორმალური (1.1.3) ტოლობებიდან და ტოლობებიდან (1.1.4), (1.1.8) გვექნება:

$$\begin{aligned}
&Z_1\bar{\beta}=P_0\bar{\beta}=Z_1,\\
&\breve{D}\bar{\beta}=P_0\bar{\beta}\cup P_1\bar{\beta}=Z_1\cup\breve{D}=\breve{D},\\
&\alpha=\delta\circ\bar{\beta}=\left(Y_1^\delta\times Z_1\bar{\beta}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\bar{\beta}\right)=\\
&\quad=\left(Y_1^\delta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)=\delta\notin B\setminus\{\alpha\}.
\end{aligned}$$

მაგრამ $\alpha=\delta$ ტოლობა ეწინააღმდეგება პირობას, რომ

$$\delta\in B_X\left(D\right)\setminus\{\alpha\}.$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში $\alpha\notin B$.

ვთქვათ $\sigma_3=\begin{pmatrix}P_0 & P_1\\ \breve{D} & Z_1\end{pmatrix}$ და $\bar{\sigma}_3$ არის $X\setminus\breve{D}$ სიმრავლის ასახვა D ნახევარმესერში. ასე, რომ თუ

$$\bar{\beta}=\left(P_0\times\breve{D}\right)\cup\left(P_1\times Z_1\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{D}}\left(\{t'\}\times\bar{\sigma}_3\left(t'\right)\right), \qquad ...(1.1.9)$$

მაშინ $V\left(D,\bar{\beta}\right)=D$, ფორმალური (1.1.3) ტოლობებიდან და ტოლობებიდან (1.1.4), (1.1.9) გვექნება:

$$\begin{aligned}
&Z_1\bar{\beta}=P_0\bar{\beta}=\breve{D},\\
&\breve{D}\bar{\beta}=P_0\bar{\beta}\cup P_1\bar{\beta}=\breve{D}\cup Z_1=\breve{D},\\
&\alpha=\delta\circ\bar{\beta}=\left(Y_1^\delta\times Z_1\bar{\beta}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\bar{\beta}\right)=\\
&\quad=\left(Y_1^\delta\times\breve{D}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)=X\times\breve{D}\notin B
\end{aligned}$$

ამრიგად $V\left(X^*,\alpha\right)=\{\breve{D}\}\neq D$.

დავუშვათ $\sigma_4=\begin{pmatrix}P_0 & P_1\\ \breve{D} & \breve{D}\end{pmatrix}$. თუ $\bar{\sigma}_4$ არის ასახვა $X\setminus\breve{D}$ სიმრავლიდან $D\setminus\{\breve{D}\}=\{Z_1\}$ სიმრავლეზე, მაშინ

$$\bar{\beta}=\left(\left(P_0\cup P_1\right)\times\breve{D}\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{D}}\left(\{t'\}\times\bar{\sigma}_4\left(t'\right)\right), \qquad ...(1.1.10)$$

$V\left(D,\overline{\beta}\right)=D$, (1.1.3) ფორმალური ტოლობებიდან და (1.1.4), (1.1.10) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} &Z_1\overline{\beta} = P_0\overline{\beta} = \breve{D}, \\ &\breve{D}\overline{\beta} = P_0\overline{\beta} \cup P_1\overline{\beta} = \breve{D} \cup \breve{D} = \breve{D}, \\ &\alpha = \delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\overline{\beta}\right) = \\ &= \left(Y_1^{\delta} \times \breve{D}\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right) = X \times \breve{D} \notin B \end{aligned}$$

ვინაიდან $V\left(X^*,\alpha\right)=\left\{\breve{D}\right\} \neq D$.

ამრიგად, b) შემთხვევიდან გამომდინარეობს, რომ B არის $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტების სიმრავლე, რადგანაც $\sigma_1-\sigma_4$ არიან ყველა შესაძლო ასახვები $\{P_0,P_1\}$ სიმრავლიდან D ნახევარმესერში.

ლემა 1.1.1 დამტკიცებულია.

შედეგი 1.1.1 *ვთქვათ,* $D=\left\{\varnothing,\breve{D}\right\} \in \Sigma_1\left(X,2\right)$ *და* $B=\left\{\alpha \in B_X\left(D\right) | V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\}$.

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1) *თუ* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$ *და* $Z_1=\varnothing$, *მაშინ* $\alpha=X\times D$ *არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

2) *თუ* $X=\breve{D}$ *და* $Z_1\neq\varnothing$, *მაშინ* $\alpha=X\times Z_1$ *არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

3) *თუ* $X=\breve{D}$ *და* $Z_1=\varnothing$, *მაშინ* $\alpha=\varnothing$ *და* $\alpha=X\times\breve{D}$ *არ წარმოქმნებიან* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

დამტკიცება. *ვთქვათ,* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$, $Z_1=\varnothing$ და $\delta,\beta \in B$. მაშინ ბინარული δ მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე:

$$\delta=\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right),$$

სადაც $Y_1^{\delta},Y_0^{\delta} \notin \{\varnothing\}$ და

$$\delta\circ\beta=\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\beta\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\beta\right)=\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\beta\right)\neq X\times\breve{D}$$

რადგანაც $Y_1^{\delta}\neq\varnothing$.

მაშასადამე, თუ $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$ და $Z_1 = \varnothing$, მაშინ $\alpha = X \times D$ *არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით.*

შედეგი 1.1.1-ის 1) დებულება დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $X = \breve{D}$ და $Z_1 \neq \varnothing$. თუ δ და β არიან B სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $\delta \circ \beta = X \times Z_1$, მაშინ ბინარული δ მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე:

$$\delta = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right) = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times X\right),$$

სადაც $Y_1^{\delta}, Y_0^{\delta} \notin \{\varnothing\}$ და

$$\delta \circ \beta = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\beta\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\beta\right) = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\beta\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times X\beta\right) = X \times Z_1,$$

ე.ი. $Z_1\beta = X\beta = Z_1$. ტოლობიდან $X\beta = Z_1$ გამომდინარეობს $t\beta = Z_1$ ყოველი $t \in X -$ თვის, რადგანაც Z_1 არის D ნახევარმესერის უმცირესი ელემენტი. ამრიგად სამართლიანია შემდეგი ტოლობა $\beta = X \times Z_1$. ბოლო ტოლობა ეწინააღმდეგება $\beta \in B$ პირობას, მაშასადამე, ბინარული $\alpha = X \times Z_1$ მიმართება არ წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით.

შედეგი 1.1.1-ის 2) დებულება დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $X = \breve{D}$, $Z_1 = \varnothing$. თუ $\alpha = \delta \circ \beta$ რომელიღაც $\delta, \beta \in B$, მაშინ ბინარული δ და β მიმართებების კვაზინორმალური წარმოდგენები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
\delta &= \left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right) = \left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times X\right),\\
\beta &= \left(Y_1^{\beta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\beta} \times \breve{D}\right) = \left(Y_1^{\beta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\beta} \times X\right),
\end{aligned}$$

სადაც $Y_1^{\delta}, Y_0^{\delta}, Y_1^{\beta}, Y_0^{\beta} \notin \{\varnothing\}$, ამდენად

$$V\left(X^*, \delta\right) = V\left(X^*, \beta\right) = D \quad (\delta, \beta \in B).$$

ასე, რომ გვექნება:

$$\begin{aligned}
&\alpha = \delta \circ \beta = \left(\left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times X\right)\right) \circ \left(\left(Y_1^{\beta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\beta} \times X\right)\right) =\\
&= \left(\left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \circ \left(Y_1^{\beta} \times \varnothing\right)\right) \cup \left(\left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \circ \left(Y_0^{\beta} \times X\right)\right) \cup\\
&\cup \left(\left(Y_0^{\delta} \times X\right) \circ \left(Y_1^{\beta} \times \varnothing\right)\right) \cup \left(\left(Y_0^{\delta} \times X\right) \circ \left(Y_0^{\beta} \times X\right)\right) = \varnothing \cup \varnothing \cup\\
&\cup \left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times X\right) = \delta
\end{aligned}$$

რადგანაც

$$X \cap Y_1^{\beta} = Y_1^{\beta} \neq \varnothing$$

და

$$X \cap Y_0^{\beta} = Y_0^{\beta} \neq \varnothing .$$

მაგრამ ტოლობებიდან $\alpha = \varnothing$, $\alpha = \delta$ ან $\alpha = X \times \breve{D}$, $\alpha = \delta$ შესაბამისად გამომდინარეობს $\alpha \notin B$ და $\alpha \in B$, რადგანაც დაშვების თანახმად $\delta \in B$, ე.ი. $\alpha = \varnothing$ და $\alpha = X \times \breve{D}$ არ წარმოიქმნებიან B სიმრავლის ელემენტებით.

შედეგი1.1.1-ის 3) დებულება დამტკიცებულია.

შედეგი 1.1.1 დამტკიცებულია.

თეორემა 1.1.3 *ვთქვათ,* $D = \left\{ Z_1, \breve{D} \right\} \in \Sigma_1\left(X, 2 \right)$*. თუ*

$$B = \left\{ \alpha \in B_X\left(D \right) | V\left(X^*, \alpha \right) = D \right\},$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) *თუ* $\left| X \setminus \breve{D} \right| \geq 1$ *და* $Z_1 \neq \varnothing$*, მაშინ* B *არის* $B_X\left(D \right)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელი სიმრავლე;*

b) *თუ* $\left| X \setminus \breve{D} \right| \geq 1$ *და* $Z_1 = \varnothing$*, მაშინ* $B \cup \left\{ X \times \breve{D} \right\}$ *არის* $B_X\left(D \right)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელი სიმრავლე;*

c) *თუ* $X = \breve{D}$ *და* $Z_1 \neq \varnothing$*, მაშინ* $B \cup \{ X \times Z_1 \}$ *არის* $B_X\left(D \right)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელი სიმრავლე;*

d) *თუ* $X = \breve{D}$ *და* $Z_1 = \varnothing$*, მაშინ* $B \cup \left\{ \varnothing, X \times \breve{D} \right\}$ *არის* $B_X\left(D \right)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელი სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\left| X \setminus \breve{D} \right| \geq 1$, $Z_1 \neq \varnothing$ და α არის $B_X\left(D \right) \setminus B$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე: $\alpha = \left(Y_1^{\alpha} \times Z_1 \right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D} \right)$, სადაც $Y_1^{\alpha} = \varnothing$ ან $Y_0^{\alpha} = \varnothing$ ($V\left(X^*, \alpha \right) \neq D$, რადგანაც $\alpha \notin B$).

ვთქვათ, $Y_1^{\alpha} = \varnothing$. მაშინ $\alpha = X \times \breve{D}$ და ნებისმიერი $\delta = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1 \right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D} \right) \in B$

და $\beta=\left(Z_1\times\breve{D}\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)-$ თვის გვექნება $\beta\in B$, რადგანაც $Z_1\neq\varnothing$ დაშვების თანახმად და $X\setminus\breve{D}\supset X\setminus Z_1\neq\varnothing$. ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\right)\circ\left(\left(Z_1\times\breve{D}\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\right)=\\&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\circ\left(Z_1\times\breve{D}\right)\right)\cup\left(\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\circ\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\right)\cup\\&\cup\left(\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\circ\left(Z_1\times\breve{D}\right)\right)\cup\left(\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\circ\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\right)=\\&=\left(Y_1^{\delta}\times\breve{D}\right)\cup\varnothing\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times Z_1\right)=\\&=\left(Y_1^{\delta}\times\breve{D}\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)=X\times\breve{D}=\alpha\end{aligned}$$

რადგანაც $\breve{D}\supset Z_1$.

ვთქვათ, $Y_0^{\alpha}=\varnothing$. მაშინ $\alpha=X\times Z_1$ და ნებისმიერი $\delta=\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\in B$ და $\beta=\left(\breve{D}\times Z_1\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)$ ელემენტებისათვის გვაქვს $\beta\in B$, რადგანაც

$$X\setminus\breve{D}\neq\varnothing\quad\left(\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1\right).$$

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\right)\circ\left(\left(\breve{D}\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)\right)=\\&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\circ\left(\breve{D}\times\varnothing\right)\right)\cup\left(\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\circ\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)\right)\cup\\&\cup\left(\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\circ\left(\breve{D}\times\varnothing\right)\right)\cup\left(\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\circ\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)\right)=\\&=\varnothing\cup\varnothing\cup\left(Y_0^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\varnothing=\varnothing=\alpha.\end{aligned}$$

რადგანაც დაშვების თანახმად $\breve{D}\supset Z_1$.

თეორემა 1.1.3 ის a) დებულება დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ და $Z_1=\varnothing$. ნებისმიერი

$\delta=\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\in B$ და $\beta=\left(\breve{D}\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)$-თვის

გვექნება, რომ $\beta\in B$, რადგანაც $X\setminus\breve{D}\neq\varnothing$ $\left(\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1\right)$. ასეთ შემთხვევაში სრულდება ტოლობა:

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\right)\circ\left(\left(\breve{D}\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)\right)=\\&=\left(\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\circ\left(\breve{D}\times\varnothing\right)\right)\cup\left(\left(Y_1^{\delta}\times\varnothing\right)\circ\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)\right)\cup\\&\cup\left(\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\circ\left(\breve{D}\times\varnothing\right)\right)\cup\left(\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)\circ\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)\right)=\\&=\varnothing\cup\varnothing\cup\left(Y_0^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\varnothing=\varnothing=\alpha.\end{aligned}$$

ახლა თეორემა 1.1.3 -ის b) დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს შედეგი 1.1.1 -ის 1) დებულებიდან.

ვთქვათ, $X=\breve{D}$ და $Z_1\neq\varnothing$. დავუშვათ, $\delta=\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)$ არის B სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი და $\beta=\left(Z_1\times\breve{D}\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)$. ადვილი დასანახია, რომ $\beta\in B$ და

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta&=\left(\left(Z_1\times Z_1\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times\breve{D}\right)\right)\circ\left(\left(Z_1\times\breve{D}\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\right)=\\&=\left(\left(Z_1\times Z_1\right)\circ\left(Z_1\times\breve{D}\right)\right)\cup\left(\left(Z_1\times Z_1\right)\circ\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\right)\cup\\&\cup\left(\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times\breve{D}\right)\circ\left(Z_1\times\breve{D}\right)\right)\cup\left(\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times\breve{D}\right)\circ\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\right)=\\&=\left(Z_1\times\breve{D}\right)\cup\varnothing\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times\breve{D}\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)=\\&=\left(Z_1\times\breve{D}\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times\breve{D}\right)=X\times\breve{D}\end{aligned}$$

რადგანაც დაშვების თანახმად $\breve{D}\supset Z_1$.

ახლა თეორემა 1.1.3 -ის c) დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს შედეგი 1.1.1 -ის 2) დებულებიდან.

თეორემა 1.1.3 -ის d) დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს შედეგი 1.1.1 -ის 3) დებულებიდან.

თეორემა 1.1.3 დამტკიცებულია.

შედეგი 1.1.2 *ვთქვათ,* X *სასრული სიმრავლეა,* $D=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1\left(X,2\right)$. *მაშინ* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან* B' *წარმომქმნელთა სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:*

a) *თუ* $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ *და* $Z_1\neq\varnothing$, *მაშინ*

$$\left|B'\right|=2^{|X|}-2\,;$$

b) *თუ* $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ *და* $Z_1=\varnothing$ *ან* $X=\breve{D}$ *და* $Z_1\neq\varnothing$, *მაშინ*

$$\left|B'\right|=2^{|X|}-1\,;$$

d) *თუ* $X=\breve{D}$ *და* $Z_1=\varnothing$ *, მაშინ*

$$\left|B'\right|=2^{|X|}.$$

დამტკიცება. ცნობილია, რომ თუ B არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა გარე ელემენტთა სიმრავლე და B' არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი წარმომქმ-ნელთა სიმრავლე, მაშინ $B\subseteq B'$. ლემა 1.1.1-ის თანახმად სიმრავლე $B=\left\{\alpha\in B_X(D)\,|\,V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\}$ წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტ-თა სიმრავლეს. ადვილი დასანახია, რომ

$$B=B_X(D)\setminus\left\{X\times Z_1, X\times\breve{D}\right\}.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\left|B\right|=2^{|X|}-2$ (იხ. ტოლობა (1.1.2).

თეორემა 1.1.3 -ის a) დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $B=B'$, ე.ი. $\left|B'\right|=2^{|X|}-2$.

თეორემა 1.1.3 -ის b) და c) დებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$B'=B\cup\left\{X\times\breve{D}\right\}$ ან $B'=B\cup\{X\times Z_1\}$,

ე.ი.

$$\left|B'\right|=\left(2^{|X|}-2\right)+1=2^{|X|}-1.$$

თეორემა 1.1.3 -ის d) დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$B'=B\cup\left\{X\times Z_1, X\times\breve{D}\right\},$$

ე.ი.

$$\left|B'\right|=\left(2^{|X|}-2\right)+2=2^{|X|}.$$

შედეგი 1.1.2 დამტკიცებულია.

მაგალითი 1.1.2. ვთქვათ $X=\{1,2,3\}$ და $D=\left\{\{1\},\{1,2\}\right\}$, ე.ი. $\left|X\setminus\breve{D}\right|=1$ და $Z_1=\{1\}\neq\varnothing$ (იხ. თეორემა 1.1.3 -ის დებულება a)). მაშინ $B_X(D)=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_7,\alpha_8\}$, სადაც

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \{(1,1),(2,1),(3,1)\},\\
\alpha_2 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(3,2)\},\\
\alpha_3 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1)\},\\
\alpha_4 &= \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\},\\
\alpha_5 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\},\\
\alpha_6 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\},\\
\alpha_7 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1)\},\\
\alpha_8 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)(3,1),(3,2)\}.
\end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში გვექნება $B=\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}$ და

$\circ$	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
α_2	α_1	α_2	α_2	α_8	α_8	α_6
α_3	α_1	α_3	α_3	α_8	α_8	α_8
α_4	α_1	α_4	α_4	α_8	α_8	α_8
α_5	α_1	α_5	α_5	α_8	α_8	α_8
α_6	α_1	α_6	α_6	α_8	α_8	α_8
α_7	α_1	α_7	α_7	α_8	α_8	α_8

მივიღეთ, რომ $B=\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სიმრავლე.

მაგალითი 1.1.3 ვთქვათ, $X=\{1,2,3\}$ და $D=\{\varnothing,\{1,2\}\}$, ე.ი. $\left|X\setminus\breve{D}\right|=1$ და $Z_1=\varnothing$ (იხ. თეორემა 1.1.3 -ის დებულება b). მაშინ $B_X(D)=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_7,\alpha_8\}$, სადაც

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \varnothing,\ \alpha_2 = \{(3,1),(3,2)\},\\
&\alpha_3 = \{(2,1),(2,2)\},\\
&\alpha_4 = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\},\\
&\alpha_5 = (1,1),(1,2),\\
&\alpha_6 = \{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2)\},\\
&\alpha_7 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\},\\
&\alpha_8 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)(3,1),(3,2)\}.
\end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში გვექნება $B=\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}\cup\{\alpha_8\}$ და

$\circ$	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
α_2	α_1	α_2	α_2	α_2	α_2	α_2	α_2

α_3	α_1	α_3	α_3	α_3	α_3	α_3	α_3
α_4	α_1	α_4	α_4	α_4	α_4	α_4	α_4
α_5	α_1	α_5	α_5	α_5	α_5	α_5	α_5
α_6	α_1	α_6	α_6	α_6	α_6	α_6	α_6
α_7	α_1	α_7	α_7	α_7	α_7	α_7	α_7
α_8	α_1	α_8	α_8	α_8	α_8	α_8	α_8

მივიღეთ, რომ $B=\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}\cup\{\alpha_8\}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სიმრავლე.

მაგალითი 1.1.4 ვთქვათ $X=\{1,2\}$ და $D=\{\{1\},\{1,2\}\}$, ე.ი.

$$X=\breve{D}=\{1,2\} \text{ და } Z_1=\{1\}\neq\varnothing$$

(იხ. დებულება თეორემა 1.1.3 -ის c). მაშინ

$$B_X(D)=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\},$$

სადაც

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \{(11),(2,1)\},\\
\alpha_2 &= \{(11),(2,1),(2,2)\},\\
\alpha_3 &= \{(11),(1,2),(2,1)\},\\
\alpha_4 &= \{(11),(1,2),(2,1),(2,2)\}.
\end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში გვექნება $B=\{\alpha_2,\alpha_3\}\cup\{\alpha_1\}$ და

$\circ$	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_1	α_4
α_2	α_1	α_2	α_4
α_3	α_1	α_3	α_4

მივიღეთ, რომ $B=\{\alpha_2,\alpha_3\}\cup\{\alpha_1\}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სიმრავლე.

მაგალითი 1.1.5. ვთქვათ $X=\{1,2\}$ და $D=\{\varnothing,\{1,2\}\}$, ე.ი. $X=\breve{D}=\{1,2\}$ და $Z_1=\varnothing$ (იხ. თეორემა 1.1.3 -ის დებულება d). მაშინ $B_X(D)=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$, სადაც

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\varnothing,\ \alpha_2=\{(2,1),(2,2)\},\\&\alpha_3=\{(1,1),(1,2)\},\\&\alpha_4=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.\end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში გვექნება $B=\{\alpha_2,\alpha_3\}\cup\{\alpha_1,\alpha_4\}$ და

$\circ$	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	α_1	α_1	α_1	α_1
α_2	α_1	α_2	α_2	α_2
α_3	α_1	α_3	α_3	α_3
α_4	α_1	α_4	α_4	α_4

მივიღეთ, რომ $B=\{\alpha_2,\alpha_3\}\cup\{\alpha_1,\alpha_4\}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სიმრავლე.

1.2 $\Sigma_1(X,3)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების წარმომქმნელთა სისტემები

განმარტება 1.2.1. შემდეგში $\overline{\beta}_1$ და $\overline{\beta}_2$ ელემენტებს ეწოდებათ $\overline{\beta} \in B_X(D)$ ბინარული მიმართების ნორმალური და დამატებითი ასახვები.

თეორემა 1.2.1 *ვთქვათ,* D *სასრული სიმრავლეა და* $\alpha, \beta \in B_X(D)$, *მაშინ ნებისმიერი* β *ბინარული მიმართების* $\overline{\beta}$ *ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენისათვის სრულდება* $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \overline{\beta}$ *ტოლობა* (იხ. წინადადება 1.0.1).

დამტკიცება. ვთქვათ, $x(\alpha \circ \beta)y$ ნებისმიერი $x \in X$ -თვის და $y \in \breve{D}$ -თვის. მაშინ რადგან $x\alpha z$, ამიტომ $x\alpha z\beta y$ ნებისმიერი $z \in \breve{D}$-თვის. ამრიგად, β ბინარული მიმართების $\overline{\beta}$ ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენის განმარტებიდან გამომდინარე გვექნება $z\overline{\beta}y$ და $z, y \in \breve{D}$. ასეთ შემთხვევაში პირობა $x\alpha z\overline{\beta}y$ შესრულებულია, ე.ი. $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha \circ \overline{\beta}$.

მეორეს მხრივ, თუ $x'\alpha z'\overline{\beta}y'$ ნებისმიერი $x', z', y' \in X$ -თვის, მაშინ სრულდება $z', y' \in \breve{D}$, ვინაიდან $\alpha, \overline{\beta} \in B_X(D)$. $z' \in \breve{D}$ პირობიდან და ფორმალური ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $0 \le k \le m-1$-თვის $z' \in P_k$. ე.ი. $z'\left(\bigcup_{i=0}^{m-1}\left(P_i \times \bigcup_{t \in P_i} t\beta\right)\right)y'$. ბოლო ტოლობიდან და $\bigcup_{i=0}^{m-1}\left(P_i \times \bigcup_{t \in P_i} t\beta\right) \subseteq \beta$ პირობიდან მივიღებთ, რომ *სრულდება* $z'\beta y'$ და $x'\alpha z'\beta y'$ პირობები. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha \circ \overline{\beta} \subseteq \alpha \circ \beta$.

ამიტომ ტოლობა $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \overline{\beta}$ სამართლიანია.

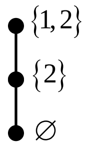
თეორემა 1.2.1 დამტკიცებულია.

თეორემა 1.2.2. *ვთქვათ,* $\tilde{B}$ *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის ნებისმიერი წარმომქმნელთა სისტემა. თუ ნებისმიერი* α *და* δ *-თვის, აღებული* $\tilde{B}$ *სიმრავლიდან და* $\beta \in \tilde{B}$ *ბინარული მიმართების* $\overline{\beta} \in B_X(D)$ *ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენისათვის სრულდება უტოლობა* $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$, *მაშინ* $\alpha \neq \delta \circ \beta$ *პირობა ასევე სამართლიანია.*

დამტკიცება. თუ $\alpha=\delta\circ\beta$ ნებისმიერი $\alpha,\delta,\beta\in\tilde{B}$-თვის, მაშინ თეორემა 1.2.1-დან გამომდინარეობს, რომ $\alpha=\delta\circ\beta=\delta\circ\bar{\beta}_1$ ნებისმიერი $\bar{\beta}_1\in B_X\left(D\right)$-თვის, სადაც $\bar{\beta}$ არის β ბინარული მიმართების ნებისმიერი ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენა. მაგრამ ტოლობა $\alpha=\delta\circ\bar{\beta}_1$ ეწინააღმდეგება $\alpha\neq\delta\circ\bar{\beta}$ პირობას β ბინარული მიმართების ნებისმიერი $\bar{\beta}\in B_X\left(D\right)$ ქვეკვაზინორმალური წარმოდგენისათვის .

მივიღეთ, რომ α ბინარული მიმართებისათვის სამართლიანია $\alpha\neq\delta\circ\beta$ პირობა.

თეორემა 1.2.2. დამტკიცებულია.



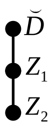
ნახ. 1.1

მაგალითი 1.2.1. ვთქვათ, $X=\{1,2,3,4,5\}$, $D=\left\{\varnothing,\{2\},\{1,2\}\right\}$, მაშინ $P_0=\varnothing$, $P_1=\{1\}$, $P_2=\{2\}$. თუ $\beta=\left\{(2,1),(2,2),(3,1),(4,1),(4,2),(5,1)\right\}$, მაშინ $\beta\in B_X(D)$, $\bar{\beta}_1=\begin{pmatrix}\varnothing & P_1 & P_2\\ \varnothing & \varnothing & \{1,2\}\end{pmatrix}$, $\bar{\beta}_2=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ \{1\} & \{1,2\} & \{1\}\end{pmatrix}$ და $\bar{\beta}$ ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$\bar{\beta}=\left(P_0\times\varnothing\right)\cup\left(P_1\times\varnothing\right)\cup\left(P_2\times\{1,2\}\right)\cup\left(\{3\}\times\{1\}\right)\cup\left(\{4\}\times\{1,2\}\right)\cup\left(\{5\}\times\{1\}\right)$$

სადაც P_1,P_2 ბაზისური წყაროებია და P_0 კი სისავსის წყარო.

2.1. ვთქვათ, $\Sigma_1(X,3)$ არის გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერთა ისეთი კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი იზომორფულია $D=\left\{Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერისა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: $Z_2\subset Z_1\subset\breve{D}$ (იხ. ნახაზი 1.2.1.):



ნახ. 1.2.1

ვთქვათ, $C(D)=\{P_0,P_1,P_2\}$ არის სიმრავლეთა ოჯახი, სადაც P_0,P_1,P_2 არიან X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები და $\varphi=\begin{pmatrix}\breve{D} & Z_1 & Z_2\\ P_0 & P_1 & P_2\end{pmatrix}$ არის ასახვა D ნახევარმესერისა $C(D)$ სიმრავლეთა ოჯახზე. მაშინ D ნახევარმესერის ფორმალურ ტოლობებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\breve{D} = P_0 \cup P_1 \cup P_2,$$
$$Z_1 = P_0 \cup P_2, \qquad \ldots(1.2.1)$$
$$Z_2 = P_0,$$

მოცემული P_1, P_2 ელემენტები არიან D ნახევარმესერის ბაზისური წყაროები, ხოლო P_0 სისავსის წყაროა. აქედან გამომდინარე $|X| \geq 2$,რისთვისაც $|P_1| \geq 1$ და $|P_2| \geq 1$.

სამართლიანია შემდეგი ფორმულირება: (იხ. [4])

თეორემა 1.2.3. *ვთქვათ,* $D = \left\{Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_1\left(X,3\right)$ *და* $Z_2 \neq \varnothing$ *. თუ* $E_X^{(r)}\left(D\right)$ *არის* $B_X\left(D\right)$ *ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულის სიმრავლე,*

$$\sigma_1 = \left(Z_2 \times Z_2\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_2\right) \times Z_1\right),\ \sigma_2 = \left(Z_2 \times Z_2\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_2\right) \times \breve{D}\right),$$
$$\sigma_3 = \left(Z_1 \times Z_2\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right),\ \sigma_4 = \left(Z_1 \times Z_1\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right)$$

და $B' = \{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\}$*,მაშინ* $B = E_X^{(r)}\left(D\right) \cup B'$ *არის* $B_X\left(D\right)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სისტემა.*

შემდეგში იგულისხმება, რომ $Z_2 = \varnothing$.

ლემა 1.2.1. *ვთქვათ,* $D = \left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_1\left(X,3\right)$ *და* $B = \left\{\alpha \in B_X\left(D\right) | V\left(X^*, \alpha\right) = D\right\}$. *მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:*

a) $B \neq \varnothing$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $|X| \geq 3$ *;*

b) $P_0 = \cap D = \varnothing$ *,* $P_1 = \breve{D} \setminus Z_1$ *და* $P_2 = Z_1$ *;*

c) *თუ* $\alpha = \delta \circ \beta$ *, ნებისმიერი* $\alpha \in B$ *-თვის და* $\delta, \beta \in B_X\left(D\right)$ *-თვის, მაშინ* $V\left(D, \beta\right) = D$ *;*

d) *თუ* $|X| \geq 3$ *,მაშინ* B *წარმოადგენს* $B_X\left(D\right)$ *ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლეს.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $D = \left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_1\left(X,3\right)$.

1) $B \neq \varnothing$ და $\alpha \in B$ ყოველი $\alpha \in B_X\left(D\right)$-თვის. მაშინ არსებობს α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენა შემდეგი სახით:

$$\alpha = \left(Y_2^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right),$$

სადაც $\left|Y_i^\alpha\right| \geq 1$ *ყოველი* $i = 0,1,2$ (თუ $Y_j^\delta = \varnothing$ ნებისმიერი j-თვის $(0 \leq j \leq 2)$, მაშინ $V\left(X^*, \alpha\right) \neq D$). ასეთ შემთხვევაში უტოლობა $|X| \geq 3$ სამართლიანია. აქედან კი მივიღებთ, რომ $B = \varnothing$, თუ $|X| = 2$.

ლემა 1.2.1-ის $a)$ დებულება დამტკიცებულია.

2) დაშვების თანახმად $Z_2 = \varnothing$, მაშინ P_0 სიმრავლის განსაზღვრიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ $P_0 = \cap D = \varnothing$. ახლა 1.2.1 ფორმალური ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $P_2 = Z_1$ და $P_1 = \breve{D} \setminus P_2 = \breve{D} \setminus Z_1$, რადგანაც $P_2 \cap P_1 = \varnothing$.

ლემა 1.2.1-ის $b)$ დებულება დამტკიცებულია.

3) ვთქვათ, $\alpha = \delta \circ \beta$, *ნებისმიერი* $\alpha \in B$ *-თვის და* $\delta, \beta \in B_X(D)$ *-თვის,* მაშინ $D = V\left(X^*, \alpha\right) \subseteq V\left(D, \beta\right)$ (იხ. თეორემა 1.0.1). რადგანაც ყოველი D ნახევარმესერისათვის ყოველთვის სამართლიანი იქნება $V(D, \beta) \subseteq D$ ჩართვა, ამიტომ $D = V(D, \beta)$.

ლემა 1.2.1.-ის $c)$ დებულება დამტკიცებულია.

4) ახლა ვთქვათ, $\alpha = \delta \circ \beta$ *ნებისმიერი* $\alpha \in B$ *-თვის და* $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$ *-თვის,*

მაშინ α და δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება სახე:

$$\alpha = \left(Y_2^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right) \text{ და } \delta = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right),$$

სადაც $Y_2^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$. თეორემა 1.2.1-დან გამომდინარე $\alpha = \delta \circ \beta = \delta \circ \overline{\beta}$, სადაც $\overline{\beta}$ წარმოადგენს β ბინარული მიმართების ქვეკვაზინორმალურ წარმოდგენას. ადვილად ჩანს, რომ

$$\alpha = \delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1 \overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D} \overline{\beta}\right). \qquad \ldots(1.2.2.)$$

X და $\breve{D}$ სიმრავლეებისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

a′) $X = \breve{D}$. მაშინ (1.1.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\overline{\beta}_2$ არის ცარიელი ასახვა, ასე, რომ $X \setminus \breve{D} = \varnothing$. ამ შემთხვევაში არსებობს β ბინარული მიმართების მხოლოდ ორი ქვეკვაზინორმალური $\overline{\beta}$ წარმოდგენა, რომელთათვისაც $V(D, \beta) = D$ (იხილეთ ლემა 1.2.1.-ის $c)$ დებულება) და $\overline{\beta} = \beta$:

$$\overline{\beta}=(\varnothing\times\varnothing)\cup\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\cup\left(Z_1\times\breve{D}\right) \text{ ან } \overline{\beta}=(\varnothing\times\varnothing)\cup\left(Z_1\times Z_1\right)\cup\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times\breve{D}\right),$$

სადაც $\overline{\beta}\in B_X(D)$.

თუ $\overline{\beta}=(\varnothing\times\varnothing)\cup\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\cup\left(Z_1\times\breve{D}\right)$, მაშინ

$$\begin{aligned}\alpha=\delta\circ\overline{\beta}&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\overline{\beta}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\overline{\beta}\right)=\\&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times\breve{D}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(\left(Y_1^\delta\cup Y_0^\delta\right)\times\breve{D}\right)\notin B\end{aligned}$$

რადგანაც $V\left(X^*,\delta\circ\overline{\beta}\right)\subseteq\left\{\varnothing,\breve{D}\right\}\neq D$. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha\neq\delta\circ\overline{\beta}$.

თუ $\overline{\beta}=(\varnothing\times\varnothing)\cup\left(Z_1\times Z_1\right)\cup\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times\breve{D}\right)$, მაშინ

$$\begin{aligned}\delta\circ\overline{\beta}&=\left(Y_2^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)=\\&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\overline{\beta}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\overline{\beta}\right)=\\&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right).\end{aligned}$$

ასე, რომ $Y_2^\delta=Y_2^\alpha$, $Y_1^\delta=Y_1^\alpha$, $Y_0^\delta=Y_0^\alpha$. გამომდინარე აქედან $\alpha=\delta$. მაგრამ ტოლობა $\alpha=\delta$ ეწინააღმდეგება პირობას $\delta\in B_X(D)\setminus\{\alpha\}$. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha\neq\delta\circ\overline{\beta}$.

შემდეგში იგულისხმება, რომ $X\neq\breve{D}$.

b′) ვთქვათ, $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$. ზემოთ განხილულის თანახმად $P_0=\varnothing$. ამ შემთხვევაში

$$\overline{\beta}_1^1=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing\end{pmatrix},\ \overline{\beta}_1^2=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & \varnothing & Z_1\end{pmatrix},\ \overline{\beta}_1^3=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & Z_1 & \varnothing\end{pmatrix},$$

$$\beta_1^4=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & Z_1 & Z_1\end{pmatrix},\ \overline{\beta}_1^5=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix},\ \overline{\beta}_1^6=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & \varnothing & \breve{D}\end{pmatrix},$$

$$\overline{\beta}_1^7=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & \breve{D} & \breve{D}\end{pmatrix},\ \overline{\beta}_1^8=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & \breve{D} & \varnothing\end{pmatrix},\ \overline{\beta}_1^9=\begin{pmatrix}\varnothing & \breve{D}\setminus Z_1 & Z_1\\ \varnothing & \breve{D} & Z_1\end{pmatrix}.$$

ყველა ასახვა $C(D)=\{\varnothing,P_1,P_2\}$ სიმრავლისა D ნახევარმესერში აკმაყოფილებს პირობას: $\overline{\beta}_1^i\left(P_0\right)=\varnothing$ $(i=1,2,\ldots,8,9)$ (იხ. ლემა 1.2.1.-ის b) -დებულება).

ვთქვათ, $\beta\in B_X(D)$ და $\overline{\beta}$ არის β ბინარული მიმართების ისეთი კვაზინორმალური წარმოდგენა, რომლისთვისაც β_1^i $(i=1,2,\ldots,8,9)$ წარმოადგენს $\overline{\beta}$ -ის ნორმალურ ასახვას.

$\overline{\beta}$ ბინარული მიმართებისთვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) ვთქვათ $\overline{\beta}_1^1 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing \end{pmatrix}$, $\overline{\beta}_2^1$ არის ასახვა $X \setminus \breve{D}$-დან $D \setminus \{\varnothing, Z_1\} = \{\breve{D}\}$ სიმრავლეზე. თუ

$$\overline{\beta} = \left(\breve{D} \times \varnothing\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\beta}_2^1(t')\right), \qquad \ldots(1.2.3)$$

მაშინ $\overline{\beta} \in B_X(D)$. (1.2.2.) და (1.2.3.) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\begin{aligned} &Z_1\overline{\beta} = \varnothing,\ \breve{D}\overline{\beta} = \varnothing, \\ &\delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\overline{\beta}\right) = \\ &= \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \varnothing\right) = X \times \varnothing = \varnothing \notin B \end{aligned}$$

რადგანაც $V\left(X^*, \delta \circ \overline{\beta}\right) \subseteq \{\varnothing\} \neq D$. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$.

2) ვთქვათ, $\overline{\beta}_1^2 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & \varnothing & Z_1 \end{pmatrix}$ და $\overline{\beta}_2^2$ იყოს ასახვა $X \setminus \breve{D}$-დან $D \setminus \{\varnothing, Z_1\} = \{\breve{D}\}$ სიმრავლეზე. თუ

$$\overline{\beta} = \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup \left(Z_1 \times Z_1\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\beta}_2^2(t')\right), \qquad \ldots(1.2.4.)$$

მაშინ $\overline{\beta} \in B_X(D)$. (1.2.2.) და (1.2.4.) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\begin{aligned} &Z_1\overline{\beta} = Z_1,\ \breve{D}\overline{\beta} = Z_1, \\ &\delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\overline{\beta}\right) = \\ &= \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times Z_1\right) = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(\left(Y_1^\delta \cup Y_0^\delta\right) \times Z_1\right) \notin B \end{aligned}$$

რადგანაც $V\left(X^*, \delta \circ \overline{\beta}\right) \subseteq \{\varnothing, Z_1\} \neq D$. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$.

$\overline{\beta}_1^3 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & Z_1 & \varnothing \end{pmatrix}$ ასახვისათვის, ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$.

3) ვთქვათ, $\beta_1^4 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & Z_1 & Z_1 \end{pmatrix}$ და $\overline{\beta}_2^4$ იყოს ასახვა $X \setminus \breve{D}$-დან $D \setminus \{\varnothing, Z_1\} = \{\breve{D}\}$ სიმრავლეზე . თუ

$$\overline{\beta} = \left(Z_1 \times \varnothing\right) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\beta}_2^4(t')\right), \qquad \ldots(1.2.5.)$$

მაშინ $\overline{\beta} \in B_X(D)$. (1.2.2.) და (1.2.5.) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$
\begin{aligned}
&Z_1\overline{\beta} = \breve{D}\overline{\beta} = Z_1,\\
&\delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_2^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\overline{\beta}\right) =\\
&= \left(Y_2^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times Z_1\right) = \left(Y_2^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(\left(Y_1^{\delta} \cup Y_0^{\delta}\right) \times Z_1\right) \notin B
\end{aligned}
$$

რადგანაც $V\left(X^*, \delta \circ \overline{\beta}\right) \subseteq \{\varnothing, Z_1\} \neq D$. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$.

4) ვთქვათ, $\overline{\beta}_1^5 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & Z_1 & \breve{D} \end{pmatrix}$ და $\overline{\beta}_2^5$ იყოს ასახვა $X \setminus \breve{D}$ -დან D სიმრავლეზე. თუ

$$
\overline{\beta} = \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\beta}_2^5(t')\right), \qquad \ldots(1.2.6.)
$$

მაშინ $\overline{\beta} \in B_X(D)$. (1.2.2.) და (1.2.6.) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$
\begin{aligned}
&Z_1\overline{\beta} = \breve{D},\ \breve{D}\overline{\beta} = \breve{D},\\
&\alpha = \delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_2^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\overline{\beta}\right) =\\
&= \left(Y_2^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^{\delta} \times \breve{D}\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right) = \left(Y_2^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(\left(Y_1^{\delta} \cup Y_0^{\delta}\right) \times \breve{D}\right) \notin B
\end{aligned}
$$

რადგანაც $V\left(X^*, \delta \circ \overline{\beta}\right) \subseteq \{\varnothing, Z_1\} \neq D$. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$.

$\overline{\beta}_1^6 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & \varnothing & \breve{D} \end{pmatrix}$, $\overline{\beta}_1^7 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & \breve{D} & \breve{D} \end{pmatrix}$ ასახვებისათვის, ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$.

5) თუ $\overline{\beta}_1^8 \subseteq \beta$, სადაც $\overline{\beta}_1^8 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & \breve{D} & \varnothing \end{pmatrix}$ და $\overline{\beta}_2^8$ არის ასახვა $X \setminus \breve{D}$ -დან $D \setminus \left\{\varnothing, \breve{D}\right\} = \{Z_1\}$ სიმრავლეზე და თუ

$$
\overline{\beta} = (Z_1 \times \varnothing) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\beta}_2^8(t')\right), \qquad \ldots(1.2.7.)
$$

მაშინ $\overline{\beta} \in B_X(D)$. (1.2.2.) და (1.2.7.) ტოლობებიდან გამომდინარე, მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
&Z_1\overline{\beta} = \varnothing,\ \breve{D}\overline{\beta} = \breve{D},\\
&\alpha = \delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_2^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\overline{\beta}\right) =\\
&= \left(Y_2^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^{\delta} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right) = \left(\left(Y_2^{\delta} \cup Y_1^{\delta}\right) \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right) \notin B
\end{aligned}
$$

რადგანაც $V\left(X^*, \delta \circ \overline{\beta}\right) \subseteq \{\varnothing, Z_1\} \neq D$. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$.

6) თუ $\overline{\beta}_1^9 \subseteq \beta$, სადაც $\overline{\beta}_1^9 = \begin{pmatrix} \varnothing & \breve{D} \setminus Z_1 & Z_1 \\ \varnothing & \breve{D} & Z_1 \end{pmatrix}$ და $\overline{\beta}_2^9$ არის ასახვა $X \setminus \breve{D}$ -დან D სიმრავლეზე და თუ

$$\overline{\beta} = (Z_1 \times Z_1) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1 \right) \times \breve{D} \right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \left(\{t'\} \times \overline{\beta}_2^9 (t') \right), \qquad \ldots(1.2.8.)$$

მაშინ $\overline{\beta} \in B_X(D)$. (1.2.2.) და (1.2.8.) გამომდინარეობს, რომ:

$$\begin{aligned} & Z_1\overline{\beta} = Z_1,\ \breve{D}\overline{\beta} = \breve{D}, \\ & \alpha = \delta \circ \overline{\beta} = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\overline{\beta}\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\overline{\beta}\right) = \\ & = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right) = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right). \end{aligned}$$

ამგვარად, მივიღეთ: $Y_2^\delta = Y_2^\alpha$, $Y_1^\delta = Y_1^\alpha$, $Y_0^\delta = Y_0^\alpha$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\alpha = \delta$. მაგრამ $\alpha = \delta$ ტოლობა ეწინააღმდეგება პირობას $\delta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$. ამრიგად, გვექნება, რომ $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$.

ამ შემთხვევაში $\beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$ ბინარული მიმართების ნებისმიერი კვაზი-ნორმალური წარმოდგენისათვის გვექნება $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$. ამრიგად, $\overline{\beta}_1^1 - \overline{\beta}_1^9$ წარმოადგენს $C(D) = \{\varnothing, P_1, P_2\}$ სიმრავლის D ნახევარმესერში ყველა იმ ასახვათა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს $\overline{\beta}_1^i(\varnothing) = \varnothing$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ პირობას. აქედან და თეორემა 1.2.2.-დან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$ -თვის $\alpha \neq \delta \circ \beta$.

ამრიგად გვაქვს, რომ B სიმრავლე (თუ $B \neq \varnothing$, ე.ი. $|X| \geq 3$) არის $B_X(D)$ ნახევარმესერის გარე ელემენტთა სიმრავლე.

ლემა 1.2.1 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.2. *ვთქვათ,* $|X| \geq 3$ *და* $D = \left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_1(X, 3)$, *მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:*

a) $Z_1\beta = \varnothing,\ \breve{D}\beta = Z_1$ *ყოველი* $\beta \in B$ *-თვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$;

b) $Z_1\beta = \breve{D}\beta = Z_1$ *ყოველი* $\beta \in B$ *-თვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$;

c) $Z_1\beta = \breve{D}\beta = \varnothing$ *ყოველი* $\beta \in B$ *-თვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 2$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $Z_1\beta=\varnothing$ ყოველი $\beta\in B$-თვის. β ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება სახე: $\beta=\left(Y_2^\beta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\beta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\beta\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^\beta,Y_1^\beta,Y_0^\beta\notin\{\varnothing\}$. ზემოთ განხილულის თანახმად რადგან $\breve{D}\beta=Z_1$, ამიტომ $\breve{D}\cap Y_0^\beta=\varnothing$. ამრიგად $\varnothing\neq Y_0^\beta\subseteq X\setminus\breve{D}$, ე.ი $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$.

მეორეს მხრივ თუ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$, მაშინ $\beta=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)$ წარმოადგენს B სიმრავლის ელემენტს, რომლისთვისაც $Z_1\beta=\varnothing$ და $\breve{D}\beta=Z_1$.

ლემა 1.2.2.-ის a) დებულება დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $Z_1\beta=\breve{D}\beta=Z_1$ ნებისმიერი $\beta\in B$-თვის. β ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება სახე: $\beta=\left(Y_2^\beta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\beta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\beta\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^\beta,Y_1^\beta,Y_0^\beta\notin\{\varnothing\}$ და $Y_0^\beta\cap\breve{D}=\varnothing$. გამომდინარე აქედან მივიღებთ: $\varnothing\neq Y_0^\beta\subseteq X\setminus\breve{D}$, ე.ი. $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$, რადგანაც $Y_0^\beta\notin\{\varnothing\}$.

მეორეს მხრივ, თუ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$, ბინარული მიმართება

$$\beta=\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times\varnothing\right)\cup\left(Z_1\times Z_1\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)\text{- თვის}$$

გვექნება $\beta\in B$ და $Z_1\beta=\breve{D}\beta=Z_1$.

ლემა 1.2.2-ის b) დებულება დამტკიცებულია.

ვთქვათ $Z_1\beta=\breve{D}\beta=\varnothing$ ნებისმიერი $\beta\in B$. β ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება სახე: $\beta=\left(Y_2^\beta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\beta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\beta\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^\beta,Y_1^\beta,Y_0^\beta\notin\{\varnothing\}$ და $t\beta=\varnothing$ ყოველი $t\in\breve{D}$-თვის, რადგანაც წარმოადგენს D ნახევარმესერის უმცირეს ელემენტს. ამ შემთხვევაში, თუ $Y_2^\beta=\breve{D}$, მაშინ $t_1\beta=Z_1$ და $t_0\beta=\breve{D}$ ნებისმიერი $t_1,t_0\in X\setminus\breve{D}$-თვის. მაშინ ადვილად ჩანს, რომ Y_2^β, Y_1^β და Y_0^β წარმოადგენენ უმცირეს სიმრავლეებს, რომელთათვისაც $\beta\in B$. აქედან მივიღებთ, რომ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 2$.

მეორეს მხრივ, დავუშვათ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 2$, ე.ი. $X\setminus\breve{D}\supseteq\{t_1,t_0\}$, მაშინ ბინარული მიმართება

$$\beta = \left(\breve{D}\times\varnothing\right)\cup\left(\{t_1\}\times Z_1\right)\cup\left(\left(X\setminus\left(\breve{D}\cup\{t_1\}\right)\right)\times\breve{D}\right)\text{-თვის}$$

გვექნება $\beta\in B$, რადგანაც $X\setminus\left(\breve{D}\cup\{t_1\}\right)\neq\varnothing$ და $Z_1\beta=\breve{D}\beta=\varnothing$.

ლემა 1.2.2-ის $c)$ დებულება დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.2. დამტკიცებულია.

B_1, B_2 და B_3 სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$B_1=\left\{\alpha\in B_X(D)\mid \mathrm{V}\left(X^*,\alpha\right)=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}\right\},$$
$$B_2=\left\{\alpha\in B_X(D)\mid \mathrm{V}\left(X^*,\alpha\right)=\left\{\varnothing,\breve{D}\right\}\right\},$$
$$B_3=\left\{\alpha\in B_X(D)\mid \mathrm{V}\left(X^*,\alpha\right)=\left\{\varnothing,Z_1\right\}\right\}.$$

B_1, B_2 და B_3 სიმრავლეების განმარტებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$B_1\cap B_2=B_1\cap B_3=B_2\cap B_2=\varnothing. \qquad \ldots(1.2.9)$$

ლემა 1.2.3. *ვთქვათ,* $|X|\geq 3$, $D=\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1(X,3)$ *და*

$$B=\left\{\alpha\in B_X(D)\mid V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\}.$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები;

a) $B_1\cup\left\{X\times Z_1, X\times\breve{D}\right\}$ *სიმრავლის ელემენტები არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

b) *თუ* $\left|X\setminus\breve{D}\right|\leq 1$, *მაშინ* $\alpha=\varnothing$ *ელემენტი არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

c) *თუ* $X=\breve{D}$, *მაშინ* B_3 *სიმრავლის ელემენტები არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\alpha=\delta\circ\beta$ ნებისმიერი $\alpha\in B_X(D)$ და $\delta,\beta\in B$-თვის. მაშინ δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე:

$\delta=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^\delta, Y_1^\delta, Y_0^\delta\notin\{\varnothing\}$. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა:

$$\alpha=\delta\circ\beta=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta\right) \qquad \ldots(1.2.10)$$

α ბინარული მიმართებისთვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) თუ $\alpha\in B_X\left(D'\right)=B_1\cup\left\{X\times Z_1, X\times\breve{D}\right\}$, სადაც $D'=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე:

$$\alpha=\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right).$$

(1.2.10) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)=\alpha=\delta\circ\beta=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta\right).$$

ბოლო ტოლობის სამართლიანობა დაუშვებელია, ვინაიდან $Y_2^\delta\neq\varnothing$. ასე, რომ $B_1\cup\left\{X\times Z_1, X\times\breve{D}\right\}$ სიმრავლის ელემენტები არ წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით.

ლემა 1.2.3-ის a) დებულება დამტკიცებულია.

2) ახლა, თუ $\alpha=\varnothing$, მაშინ (1.2.10) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\varnothing=\alpha=\delta\circ\beta=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta\right).$$

ბოლო ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება, რომ $Z_1\beta=\breve{D}\beta=\varnothing$. ლემა 1.2.2.-ის c) დებულების თანახმად ნებისმიერი $\beta\in B$-თვის ტოლობა $Z_1\beta=\breve{D}\beta=\varnothing$ სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 2$. ასე, რომ თუ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\leq 1$, *მაშინ* $\alpha=\varnothing$ *ელემენტი არ წარმოიქმნება* B *სიმრავლის ელემენტებით.*

ლემა 1.2.3-ის b) დებულება დამტკიცებულია.

3) ვთქვათ, $X=\breve{D}$ და $\alpha\in B_3$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha=\left(Y_2^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)$, სადაც $Y_2^\alpha, Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$. მაშინ 1.2.10 ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left(Y_2^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)=\alpha=\delta\circ\beta=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta\right).$$

ბოლო ტოლობა სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Z_1\beta=\varnothing,\ \breve{D}\beta=Z_1$ ან $Z_1\beta=\breve{D}\beta=Z_1$, ვინაიდან $Z_1\subset\breve{D}$.

$a')$ თუ $Z_1\beta=\varnothing,\ \breve{D}\beta=Z_1$, მაშინ ლემა 1.2.2.-ის $d)$ დებულების თანახმად $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $X=\breve{D}$.

$b')$ თუ $Z_1\beta=\breve{D}\beta=Z_1$, მაშინ ლემა 1.2.2.-ის $b)$ დებულების თანახმად $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $X=\breve{D}$.

ამ შემთხვევაში $a')$ და $b')$ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ B_3 სიმრავლის ელემენტები არ წარმოიქმნება სიმრავლის ელემენტებით.

ლემა 1.2.3-ის $c)$ დებულება დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.3 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.4. *ვთქვათ,* $|X|\geq 3$, $D=\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_1\left(X,3\right)$ *და*

$$B=\left\{\alpha\in B_X\left(D\right)|V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\},\ \gamma_0=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right).$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) *თუ* $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$, *მაშინ* $B_2\cup B_3$ *სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნებიან* B *სიმრავლის ელემენტებით;*

b) *თუ* $X=\breve{D}$, *მაშინ* B_3 *სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნებიან* $B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}$ *სიმრავლის ელემენტებით;*

c) *თუ* $X=\breve{D}$, *მაშინ* B_2 *სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნებიან* $B_1\cup\{\gamma_0\}$ *სიმრავლის ელემენტებით.*

დამტკიცება. ახლა ვთქვათ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ და α იყოს $B_2\cup B_3$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი.

α ბინარული მიმართებისთვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

1) $\alpha\in B_2$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება სახე: $\alpha=\left(Y_2^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$.

$a')$ თუ $\left|Y_0^\alpha\right|\geq 1$, მაშინ $\left|Y_2^\alpha\right|\geq 2$ $\left(\left|X\right|\geq 3\right)$ (იხ. ლემა 1.2.1-ის $a)$ დებულება). ამ შემთხვევაში დავუშვათ, რომ

$$\beta=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times Z_1\right)\cup\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times\breve{D}\right),$$

მაშინ $\beta\in B$, ვინაიდან $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ და

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta\right)=\\&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)=\\&=\left(\left(Y_2^\delta\cup Y_1^\delta\right)\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)=\alpha,\end{aligned}$$

თუ $Y_2^\delta\cup Y_1^\delta=Y_2^\alpha$ და $Y_0^\delta=Y_0^\alpha$, ვინაიდან $\left|Y_2^\delta\right|\geq 1$, $\left|Y_1^\delta\right|\geq 1$ და $\left|Y_0^\delta\right|\geq 1$.

$b')$ ვთქვათ $\left|Y_2^\alpha\right|\geq 1$, მაშინ $\left|Y_0^\alpha\right|\geq 2$ $\left(\left|X\right|\geq 3\right)$. ამ შემთხვევაში დავუშვათ, რომ

$$\beta=\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times Z_1\right)\cup\left(Z_1\times\breve{D}\right),$$

მაშინ $\beta\in B$, ვინაიდან $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ და

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta\right)=\\&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times\breve{D}\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)=\\&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(\left(Y_1^\delta\cup Y_0^\delta\right)\times\breve{D}\right)=\alpha,\end{aligned}$$

თუ $Y_2^\delta=Y_2^\alpha$ და $Y_1^\delta\cup Y_0^\delta=Y_0^\alpha$, ვინაიდან $\left|Y_2^\delta\right|\geq 1$, $\left|Y_1^\delta\right|\geq 1$ და $\left|Y_0^\delta\right|\geq 1$.

გამომდინარე აქედან B_2 სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით.

2) $\alpha\in B_3$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება სახე: $\alpha=\left(Y_2^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)$, სადაც $Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$.

$c')$ ვთქვათ $\left|Y_1^\alpha\right|\geq 1$ მაშინ $\left|Y_2^\alpha\right|\geq 2$ $\left(\left|X\right|\geq 3\right)$. ამ შემთხვევაში დავუშვათ, რომ

$$\beta=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(\breve{D}\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right),$$

მაშინ $\beta\in B$, ვინაიდან $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ და

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta\right)=\\&=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^\delta\times Z_1\right)=\\&=\left(\left(Y_2^\delta\cup Y_1^\delta\right)\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^\delta\times Z_1\right)=\alpha,\end{aligned}$$

თუ $Y_2^\delta \cup Y_1^\delta = Y_2^\alpha$ და $Y_0^\delta = Y_1^\alpha$, ვინაიდან $\left|Y_2^\delta\right| \geq 1$, $\left|Y_1^\delta\right| \geq 1$ და $\left|Y_0^\delta\right| \geq 1$.

$d')$ ვთქვათ $\left|Y_2^\alpha\right| \geq 1$ მაშინ $\left|Y_1^\alpha\right| \geq 2$ $\left(\left|X\right| \geq 3\right)$. ამ შემთხვევაში დავუშვათ, რომ

$$\beta = \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup \left(Z_1 \times Z_1\right) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \breve{D}\right),$$

მაშინ $\beta \in B$, ვინაიდან $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$ და

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta &= \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\beta\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\beta\right) = \\ &= \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times Z_1\right) = \\ &= \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(\left(Y_1^\delta \cup Y_0^\delta\right) \times Z_1\right) = \alpha,\end{aligned}$$

თუ $Y_2^\delta = Y_2^\alpha$ და $Y_1^\delta \cup Y_0^\delta = Y_1^\alpha$, ვინაიდან $\left|Y_2^\delta\right| \geq 1$, $\left|Y_1^\delta\right| \geq 1$ და $\left|Y_0^\delta\right| \geq 1$.

გამომდინარე აქედან B_3 სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით.

ლემა 1.2.4-ის $a)$ დებულება დამტკიცებულია.

3) ვთქვათ, $X = \breve{D}$, $\delta_0 = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right)$ და α ბინარული მიმართება იყოს B_3 სიმრავლის ელემენტი. მაშინ $\delta_0 \in B_1$ და α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = \left(Y_2^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right)$, სადაც $Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$. ახლა ვთქვათ $\alpha = \delta \circ \beta$ ნებისმიერი $\delta, \beta \in \left(B \cup \left\{\gamma_1, \gamma_2\right\}\right) \setminus \left\{\alpha\right\}$ -თვის.

Y_2^α და Y_1^α სიმრავლეებისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

$e')$ ვთქვათ $Y_1^\alpha \geq 1$, მაშინ $Y_2^\alpha \geq 2$ ($|X| \geq 3$, დაშვების თანახმად) და $\delta \in B \setminus \{\alpha\}$, მაშინ B სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება სახე: $\delta = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^\delta, Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\varnothing\}$ ვინაიდან $V\left(X^*, \delta\right) = D$ და

$$\begin{aligned}\delta \circ \gamma_0 &= \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\gamma_0\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\gamma_0\right) = \\ &= \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^\delta \times Z_1\right) = \left(\left(Y_2^\delta \cup Y_1^\delta\right) \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^\delta \times Z_1\right) = \alpha,\end{aligned}$$

თუ $Y_2^\delta \cup Y_1^\delta = Y_2^\alpha$ და $Y_0^\delta = Y_1^\alpha$, ვინაიდან $Y_2^\delta, Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\varnothing\}$.

$f')$ თუ $Y_2^\alpha \geq 1$, მაშინ $Y_1^\alpha \geq 2$ და

$$\delta_0 \circ \gamma_0 = \left(\left(X \setminus Z_1 \right) \times Z_1 \gamma_0 \right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D} \gamma_0 \right) =$$
$$= \left(\left(X \setminus Z_1 \right) \times \varnothing \right) \cup \left(Z_1 \times Z_1 \right) = \gamma_1,$$
$$\delta \circ \gamma_1 = \left(Y_2^\delta \times \varnothing \right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1 \gamma_1 \right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D} \gamma_1 \right) =$$
$$= \left(Y_2^\delta \times \varnothing \right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1 \right) \cup \left(Y_0^\delta \times Z_1 \right) = \left(Y_2^\delta \times \varnothing \right) \cup \left(\left(Y_1^\delta \cup Y_0^\delta \right) \times Z_1 \right) = \alpha,$$

თუ $Y_2^\delta = Y_2^\alpha$ და $Y_1^\delta \cup Y_0^\delta = Y_1^\alpha$, ვინაიდან $Y_2^\delta, Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\varnothing\}$.

იმ შემთხვევაში, თუ $X = \breve{D}$, მაშინ B_3 სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნება $B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}$ სიმრავლის ელემენტებით.

ლემა 1.2.4-ის b) დებულება დამტკიცებულია.

4) ვთქვათ, $X = \breve{D}$ და α იყოს B_2 სიმრავლის ელემენტი. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = \left(Y_2^\alpha \times \varnothing \right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D} \right)$, სადაც $Y_2^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$. ახლა ვთქვათ $\alpha = \delta \circ \beta$ ნებისმიერი $\delta, \beta \in \left(B_1 \cup \{\gamma_0\} \right) \setminus \{\alpha\}$.

ადვილად ჩანს, რომ X სიმრავლის ქვესიმრავლეები Y_2^α და Y_0^α შეადგენენ თვით X სიმრავლის ორელემენტიან დანაწილებას. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\delta = \left(Y_2^\alpha \times Z_1 \right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D} \right)$ არის B_1 სიმრავლის ელემენტი და ბინარული γ_0 და δ_0 მიმართების განსაზღვრის მიხედვით $\gamma_0 \circ \delta_0 \in B_2$.

$$\gamma_0 \circ \delta_0 = \left(Z_1 \times \varnothing \delta \right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1 \right) \times Z_1 \delta \right) =$$
$$= \left(Z_1 \times \varnothing \right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1 \right) \times \breve{D} \right) = \gamma_2,$$
$$\delta \circ \gamma_2 = \left(Y_2^\alpha \times Z_1 \gamma_2 \right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D} \gamma_2 \right) = \left(Y_2^\alpha \times \varnothing \right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D} \right) = \alpha .$$

აქედან კი უკვე გამომდინარეობს, რომ B_2 სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნება $B_1 \cup \{\gamma_0\}$. სიმრავლის ელემენტებით.

ლემა 1.2.4-ის c) დებულება დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.4 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.5. *ვთქვათ,* $|X| \ge 3$, $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$. *თუ* $|X \setminus \breve{D}| \ge 1$, *მაშინ* $B_1' = B \cup B_1$ *წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $|X| \ge 3$ და $|X \setminus \breve{D}| \ge 1$. უპირველეს ყოვლისა დავამტკიცოთ, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიქმნება B_1' სიმრავლისგან. მართლაც, ვთქვათ α იყოს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე:

$$\alpha = (Y_2^{\alpha} \times \varnothing) \cup (Y_1^{\alpha} \times Z_1) \cup (Y_0^{\alpha} \times \breve{D}).$$

Y_2^{α}, Y_1^{α} და Y_0^{α} სიმრავლეებისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) $Y_2^{\alpha}, Y_1^{\alpha}, Y_0^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$. მაშინ გვექნება $V(X^*, \alpha) = D$, ე.ი. $\alpha \in B$.

2) $Y_2^{\alpha} = \varnothing$ $Y_1^{\alpha}, Y_0^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = (Y_1^{\alpha} \times Z_1) \cup (Y_0^{\alpha} \times \breve{D})$, ე.ი. $\alpha \in B_1$.

3) $Y_1^{\alpha} = \varnothing$ $Y_2^{\alpha}, Y_0^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = (Y_2^{\alpha} \times \varnothing) \cup (Y_0^{\alpha} \times \breve{D})$. ამრიგად $\alpha \in B_2$. ლემა 1.2.4-ის $a)$ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ B_2 სიმრავლის ელემენტები წარმოქმნიან B სიმრავლის ელემენტებს.

4) $Y_0^{\alpha} = \varnothing$ $Y_2^{\alpha}, Y_1^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = (Y_2^{\alpha} \times \varnothing) \cup (Y_1^{\alpha} \times Z_1)$. ამრიგად $\alpha \in B_3$. ლემა 1.2.4-ის $a)$ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ B_3 სიმრავლის ელემენტები წარმოქმნიან B სიმრავლის ელემენტებს.

5) თუ $Y_2^{\alpha} = Y_0^{\alpha} = \varnothing$, $Y_1^{\alpha} \ne \varnothing$, ან $Y_2^{\alpha} = Y_1^{\alpha} = \varnothing$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = X \times Z_1$, ან $\alpha = X \times \breve{D}$.

ვთქვათ δ და β_0 ბინარული მიმართებების კვაზინორმალურ წარმოდგენებს აქვს შემდეგი სახე: $\delta = (Y_1^{\delta} \times Z_1) \cup (Y_0^{\delta} \times \breve{D})$ და $\beta_0 = (\breve{D} \times Z_1) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times \breve{D})$, სადაც

$Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\varnothing\}$, ე.ი. $\delta, \beta_0 \in B_1$ და $Y_1^\delta \cup Y_0^\delta = X$, ვინაიდან $X \setminus \breve{D} \neq \varnothing$ (დაშვების თანახმად $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$). ამ შემთხვევაში სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta_0 &= \left(\left(Y_1^\delta \times Z_1\beta_0\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\beta_0\right)\right) = \\ &= \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times Z_1\right) = X \times Z_1 = \alpha.\end{aligned}$$

ახლა, ვთქვათ $\beta_1 = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right)$, მაშინ $\beta_1 \in B_1$, ვინაიდან $Z_1 \neq \varnothing$ და D ნახევარმესერის განმარტებიდან გამომდინარე $X \setminus Z_1 \neq \varnothing$. ამ შემთხვევაში სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta_1 &= \left(\left(Y_1^\delta \times Z_1\beta_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\beta_1\right)\right) = \\ &= \left(Y_1^\delta \times \breve{D}\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right) = X \times \breve{D} = \alpha.\end{aligned}$$

ვთქვათ, ნებისმიერი $\delta = \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right) \in B_1$ -თვის და $\beta = \left(\breve{D} \times Z_1\right) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \breve{D}\right)$ - თვის გვაქვს, რომ $\beta \in B_1$ ვინაიდან $X \setminus \breve{D} \neq \varnothing$ $\left(\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1\right)$. ასე, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta &= \left(\left(Y_1^\delta \times Z_1\beta\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\beta\right)\right) = \\ &= \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times Z_1\right) = X \times Z_1 = \alpha.\end{aligned}$$

ვთქვათ, ნებისმიერი $\delta = \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right) \in B_1$ -თვის და $\beta = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right)$ - თვის გვაქვს, რომ $\beta \in B_1$, ვინაიდან $Z_1 \neq \varnothing$ და D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად $X \setminus Z_1 \neq \varnothing$. ამ შემთხვევაში სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta &= \left(\left(Y_1^\delta \times Z_1\beta\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\beta\right)\right) = \\ &= \left(Y_1^\delta \times \breve{D}\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right) = X \times \breve{D} = \alpha.\end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $\alpha = X \times Z_1$ და $\alpha = X \times \breve{D}$ ელემენტები წარმოქმნიან B_1 სიმრავლის ელემენტებს.

6) $Y_1^\alpha = Y_0^\alpha = \varnothing$, მაშინ $Y_2^\alpha = X$, ვინაიდან α არის ბინარული მიმართება. აქედან კი გვექნება: $\alpha = \varnothing$.

ახლა ვთქვათ $\delta = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right)$ არის B სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი (დაშვების თანახმად მოცემული $|X| \geq 3$ უტოლობა სამართლიანია).

შემდეგ, დაშვების თანახმად გვაქვს $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$. ამ შემთხვევაში $\beta_2=\left(\breve{D}\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)$-თვის გვაქვს $\beta_2\in B_2$ და ლემა 1.2.4-ის $a)$ დებულების თანახმად β_2 ბინარული მიმართება წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით. და

$$\delta\circ\beta_2=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta_2\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta_2\right)=$$
$$=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\varnothing\right)=X\times\varnothing=\varnothing.$$

ამრიგად, B_1' წარმოადგენს $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის წარმომქმნელთა სისტემას.

დაშვების თანახმად $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ და დავამტკიცოთ, რომ B_1' არის დაუყვანი სიმრავლე.

ვთქვათ, $\alpha\in B_1'$ და α ელემენტისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

7) თუ $\alpha\in B$, მაშინ $\alpha\neq\sigma\circ\tau$ ყოველი $\sigma,\tau\in B_X\left(D\right)\setminus\{\alpha\}$-თვის, ვინაიდან ლემა 1.2.1-ის $d)$ დებულების თანახმად B წარმოადგენს $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლეს. ამრიგად, $\alpha\neq\sigma\circ\tau$ ყოველი $\sigma,\tau\in B_1'\setminus\{\alpha\}$-თვის, ვინაიდან $B_1'\setminus\{\alpha\}\subseteq B_X\left(D\right)\setminus\{\alpha\}$.

ამ შემთხვევაში გვექნება $\alpha\notin B$.

8) თუ $\alpha\in B_1$, მაშინ B_1 სიმრავლის განმარტების თანახმად α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha=\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_1^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$. შემდეგ, ვთქვათ $\alpha=\delta\circ\beta$ ნებისმიერი $\delta,\beta\in B_1'\setminus\{\alpha\}$-თვის და δ ელემენტისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

$a')$ $\delta\in B\setminus\{\alpha\}$ და $\beta\in B_1'\setminus\{\alpha\}$. მაშინ B_1 სიმრავლის განმარტების თანახმად δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^\delta,Y_1^\delta,Y_0^\delta\notin\{\varnothing\}$, ვინაიდან $V\left(X^*,\delta\right)=D$ და

$$\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)=\alpha=\delta\circ\beta=\left(Y_2^\delta\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^\delta\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^\delta\times\breve{D}\beta\right).$$

ბოლო ტოლობა დაუშვებელია, ვინაიდან $Y_2^\alpha\notin\{\varnothing\}$.

ასე, რომ $\delta\notin B\setminus\{\alpha\}$.

$b')$ თუ $\delta \in B_1 \setminus \{\alpha\}$ და $\beta \in B_1' \setminus \{\alpha\}$, მაშინ B_1 სიმრავლის განმარტების თანახმად δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_1^{\delta}, Y_0^{\delta} \notin \{\varnothing\}$ და

$$\left(Y_1^{\alpha} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right) = \alpha = \delta \circ \beta = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\beta\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\beta\right).$$

ბოლო ტოლობა დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, თუ $Z_1\beta = Z_1$, $\breve{D}\beta = \breve{D}$, ვინაიდან $Z_1 \subset \breve{D}$. აქედან მივიღებთ, რომ

$$\alpha = \left(Y_1^{\alpha} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right) = \left(Y_1^{\delta} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\delta} \times \breve{D}\right) = \delta .$$

მაგრამ ტოლობა $\alpha = \delta$ ეწინააღმდეგება პირობას $\delta \in B_1 \setminus \{\alpha\}$,

ასეთ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ $\delta \notin B_1 \setminus \{\alpha\}$.

ამრიგად, $a')$ და $b')$ შემთხვევებიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha \notin B_1$.

გამომდინარე აქედან, ნებისმიერი $\delta, \beta \in B_1' \setminus \{\alpha\}$-თვის $\alpha \neq \delta \circ \beta$, ე.ი. $B_1' = B \cup B_1$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სისტემა.

ლემა 1.2.5 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.6. *ვთქვათ,* $|X| \geq 3$, $D = \left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_1(X,3)$ *და*

$$B = \left\{\alpha \in B_X(D) \mid V\left(X^*, \alpha\right) = D\right\},\ B_1 = \left\{\alpha \in B_X(D) \mid V\left(X^*, \alpha\right) = \left\{Z_1, \breve{D}\right\}\right\},$$
$$\gamma_0 = \left(Z_1 \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right).$$

თუ $X = \breve{D}$, *მაშინ* $B_2' = B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}$ *არის* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სისტემა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $|X| \geq 3$, $X = \breve{D}$. ჩვენ უკვე დამტკიცებული გვაქვს, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ელემენტებს წარმოქმნის $B_2' = B \cup B_1 \cup \{\gamma_1\}$ სიმრავლის ელემენტები. მართლაც, ვთქვათ α იყოს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე:

$$\alpha = \left(Y_2^{\alpha} \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^{\alpha} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right).$$

Y_2^{α}, Y_1^{α} და Y_0^{α} სიმრავლეებისთვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

1) $Y_2^{\alpha}, Y_1^{\alpha}, Y_0^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$. მაშინ გვექნება $V\left(X^*, \alpha\right) = D$, ე.ი. $\alpha \in B$;

2) $Y_2^\alpha = \varnothing$ $Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, ე.ი. $\alpha \in B_1$;

3) $Y_1^\alpha = \varnothing$ $Y_2^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = \left(Y_2^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right) \in B_2$ და ლემა 1.2.4-ის c) დებულების თანახმად B_2 სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნება $B_1 \cup \{\gamma_0\}$ სიმრავლის ელემენტებით.

4) $Y_0^\alpha = \varnothing$ $Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = \left(Y_2^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \in B_3$. მაშინ ლემა 1.2.4-ის b) დებულების თანახმად B_3 სიმრავლის ელემენტები წარმოიქმნება $B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}$ სიმრავლის ელემენტებით.

5) თუ $Y_2^\alpha = Y_0^\alpha = \varnothing$, $Y_1^\alpha \neq \varnothing$ ან $Y_2^\alpha = Y_1^\alpha = \varnothing$, $Y_0^\alpha \neq \varnothing$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = X \times Z_1$ ან $\alpha = X \times \breve{D}$.

თუ $\delta_0 = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right)$ და $\delta_1 = \left(Z_1 \times Z_1\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right)$, მაშინ $\delta_0, \delta_1 \in B_1$, ვინაიდან $|Z_1| \geq 1$ და D ნახევარმესერის განმარტებიდან გამომდინარე $|X \setminus Z_1| \geq 1$ $\left(\varnothing \subset Z_1 \subset \breve{D}\right)$. ასევე

$$\begin{aligned}
&\delta_0 \circ \gamma_0 = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup \left(Z_1 \times Z_1\right) = \gamma_1 \\
&\delta_1 \circ \gamma_1 = \left(Z_1 \times Z_1 \gamma_1\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \breve{D} \gamma_1\right) = \\
&\qquad = \left(Z_1 \times Z_1\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) = X \times Z_1 = \alpha, \\
&\delta_0 \circ \delta_0 = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1 \delta_0\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D} \delta_0\right) = \\
&\qquad = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right) = X \times \breve{D} = \alpha.
\end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში $\alpha = X \times Z_1$ და $\alpha = X \times \breve{D}$ წარმოიქმნება $B_1 \cup \{\gamma_0\}$ სიმრავლის ელემენტებით.

6) $Y_1^\alpha = Y_0^\alpha = \varnothing$. მაშინ ვინაიდან ბინარული α მიმართების წარმოდგენა არის კვაზინორმალური, $Y_2^\alpha = X$. მაშინ $\alpha = \varnothing$ და

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 \circ \gamma_0 = \left(\left(Z_1 \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right)\right) \circ \gamma_0 = \left(Z_1 \times \varnothing \gamma_0\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1 \gamma_0\right) = \\
&= \left(Z_1 \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) = X \times \varnothing = \varnothing.
\end{aligned}$$

მოცემულ შემთხვევაში ბინარულ $\alpha = \varnothing$ მიმართებები წარმოიქმნება B_2' სიმრავლის ელემენტებით.

ამრიგად, $B_2' = B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის წარმომქმნელთა სისტემა.

ახლა, ვთქვათ $|X| \geq 3$, $X = \breve{D}$ და დავამტკიცოთ, რომ $B_2' = B \cup B_1 \cup \{\gamma_1\}$ სიმრავლე არის დაუყვანი. $\alpha \in B_2'$ ელემენტისათვის განვიხილოთ შემდეგი შეთხვევები:

7) თუ $\alpha \in B$, მაშინ $\alpha \neq \sigma \circ \tau$ ყოველი $\sigma, \tau \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$-თვის, ვინაიდან ლემა 1.2.1-ის $d)$ დებულების თანახმად B წარმოადგენ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლეს. ამრიგად, $\alpha \neq \sigma \circ \tau$ ყოველი $\sigma, \tau \in B_2' \setminus \{\alpha\}$-თვის, ვინაიდან $B_2' \setminus \{\alpha\} \subseteq B_X(D) \setminus \{\alpha\}$.

ასეთ შემთხვევაში $\alpha \notin B$.

8) ვთქვათ $\alpha \in B_1$, მაშინ B_1 სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\alpha = \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$. შემდეგ, ვთქვათ $\alpha = \delta \circ \beta$ ნებისმიერი $\delta, \beta \in B_2' \setminus \{\alpha\}$-თვის.

δ ელემენტისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

$a')$ თუ $\delta \in B \setminus \{\alpha\}$ და $\beta \in B_2' \setminus \{\alpha\}$, მაშინ B სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^\delta, Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\varnothing\}$, ვინაიდან $V\left(X^*, \delta\right) = D$ და

$$\left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right) = \alpha = \delta \circ \beta = \left(Y_2^\delta \times \varnothing\right) \cup \left(Y_1^\delta \times Z_1\beta\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\beta\right).$$

ვინაიდან $Y_2^\delta \notin \{\varnothing\}$, ბოლო ტოლობა დაუშვებელია.

ამრიგად, გვექნება: $\delta \notin B \setminus \{\alpha\}$.

$b')$ თუ $\delta \in B_1 \setminus \{\alpha\}$ და $\beta \in B_2' \setminus \{\alpha\}$, მაშინ B_1 სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta = \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\varnothing\}$ და

$$\left(Y_1^{\alpha}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)=\alpha=\delta\circ\beta=\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\beta\right).$$

ვინაიდან $Z_1\subset\breve{D}$, ამიტომ ბოლო ტოლობა დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, როცა $Z_1=Z_1\beta$ და $\breve{D}=\breve{D}\beta$. ე.ი.

$$\alpha=\left(Y_1^{\alpha}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)=\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)=\delta.$$

გვექნება, რომ $\alpha=\delta$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას: $\delta\in B_1\setminus\{\alpha\}$.

ასეთ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ $\delta\notin B_1\setminus\{\alpha\}$.

$c')$ თუ $\delta=\gamma_0$ და $\beta\in B_2'\setminus\{\alpha\}$, მაშინ $\delta=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)$ და $\delta\neq\alpha$, ე.ი.

$$\left(Y_1^{\alpha}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)=\alpha=\delta\circ\beta=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\beta\right).$$

ვინაიდან $Y_1^{\alpha}, Z_1\notin\{\varnothing\}$, ბოლო ტოლობა დაუშვებელია.

ამ შემთხვევაში გვექნება $\delta\neq\gamma_0$.

$a')$, $b')$ და $c')$ შემთხვევებიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha\notin B_1$.

9) $\alpha=\gamma_0=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)$. შემდეგ, ვთქვათ $\alpha=\delta\circ\beta$ ნებისმიერი $\delta,\beta\in B_2'\setminus\{\gamma_0\}$-თვის.

δ ელემენტისთვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

$a')$ თუ $\delta\in B\setminus\{\gamma_0\}$ და $\beta\in B_2'\setminus\{\gamma_0\}$, მაშინ B სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta=\left(Y_2^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_2^{\delta}, Y_1^{\delta}, Y_0^{\delta}\notin\{\varnothing\}$, ვინაიდან $V\left(X^*,\delta\right)=D$ და

$$\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)=\alpha=\delta\circ\beta=\left(Y_2^{\delta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_1^{\delta}\times Z_1\beta\right)\cup\left(Y_0^{\delta}\times\breve{D}\beta\right).$$

ბოლო ტოლობა დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, თუ $Z_1\beta=\varnothing$, $Z_1=\breve{D}\beta$ ან $Z_1=Z_1\beta=\breve{D}\beta$.

თუ $Z_1\beta=\varnothing$, $Z_1=\breve{D}\beta$, მაშინ ლემა 1.2.2.-ის $a)$ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$. მაგრამ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ უტოლობა ეწინააღმდეგება $X=\breve{D}$ ტოლობას.

თუ $Z_1=Z_1\beta=\breve{D}\beta$, მაშინ ლემა 1.2.2.-ის $b)$ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$. მაგრამ $\left|X\setminus\breve{D}\right|\geq 1$ უტოლობა ეწინააღმდეგება $X=\breve{D}$ ტოლობას.

ამრიგად a') შემთხვევაში გვექნება, რომ $\delta \notin B \setminus \{\gamma_0\}$.

b') თუ $\delta \in B_1 \setminus \{\gamma_0\}$ და $\beta \in B_2' \setminus \{\gamma_0\}$, მაშინ B_1 სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე δ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta = \left(Y_1^\delta \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\varnothing\}$ და

$$\left(Z_1 \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) = \alpha = \delta \circ \beta = \left(Y_1^\delta \times Z_1\beta\right) \cup \left(Y_0^\delta \times \breve{D}\beta\right).$$

ბოლო ტოლობა დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, თუ $Z_1\beta = \varnothing$ და $\breve{D}\beta = Z_1$, ვინაიდან $Z_1 \subset \breve{D}$.

თუ $Z_1\beta = \varnothing$ და $\breve{D}\beta = Z_1$ ყოველი $\beta \in B$-თვის, მაშინ ლემა 1.2.2.-ის a) დებულებიდან გამომდინარე გვექნება: $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$. მაგრამ ბოლო უტოლობა ეწინააღმდეგება $X = \breve{D}$ ტოლობას.

ამ შემთხვევაში გვექნება $\delta \notin B_1 \setminus \{\gamma_0\}$.

a') და b') შემთხვევებიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha \neq \gamma_0$.

მოცემულ შემთხვევაში $\alpha \neq \delta \circ \beta$ ყოველი $\delta, \beta \in B_2' \setminus \{\alpha\}$-თვის, ამრიგად, სიმრავლე $B_2' = B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}$ წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას.

ლემა 1.2.6 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.7. *ვთქვათ,* $|X| = 2$, $D = \left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_1(X, 3)$. *მაშინ* $B = \varnothing$ *და* $B_3' = B_1 \cup \{\gamma_0\}$ *სიმრავლე წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას.*

დამტკიცება. ვთქვათ $X = \breve{D}$ და $|X| = 2$. მაშინ $B_X(D) = \{\gamma_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_8\}$, სადაც

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \left(Z_1 \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) = \left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1,\\
&\alpha_1 = \left(Z_1 \times Z_1\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right),\ \alpha_2 = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_3 = X \times \varnothing = \varnothing,\ \alpha_4 = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup \left(Z_1 \times Z_1\right) = Z_1 \times Z_1,\\
&\alpha_5 = \left(Z_1 \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right) = \left(X \setminus Z_1\right) \times \breve{D},\\
&\alpha_6 = \left(\left(X \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right) = Z_1 \times \breve{D},\ \alpha_7 = X \times Z_1,\ \alpha_8 = X \times \breve{D}.
\end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში გვექნება: $B = \varnothing$, $X = \breve{D}$, $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ და $B_3' = B_1 \cup \{\gamma_0\}$ არიან $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის წარმომქმნელები. მართლაც:

$\circ$	γ_0	α_1	α_2
γ_0	α_3	γ_0	α_5
α_1	γ_0	α_1	α_8
α_2	α_4	α_2	α_8

სადაც $\alpha_2 \circ (\gamma_0 \circ \alpha_2) = \alpha_2 \circ \alpha_5 = \alpha_6$ და $(\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \gamma_0 = \alpha_8 \circ \gamma_0 = \alpha_7$. ბოლო პირობიდან და ლემა 1.2.6-დან გამომდინარეობს, რომ B_3' სიმრავლე წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას.

ლემა 1.2.7 დამტკიცებულია.

თეორემა 1.2.4. *ვთქვათ,* $|X| \geq 3$, $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$. *თუ*

$$B = \{\alpha \in B_X(D) | V(X^*, \alpha) = D\},\ B_1 = \{\alpha \in B_X(D) | V(X^*, \alpha) = \{Z_1, \breve{D}\}\},$$
$$\gamma_0 = (Z_1 \times \varnothing) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_1).$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) *თუ* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$, *მაშინ* $B \cup B_1$ *სიმრავლე წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას;*

b) *თუ* $X = \breve{D}$, *მაშინ* $B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}$ *სიმრავლე წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას;*

c) *თუ* $|X| = 2$, *მაშინ* $B_1 \cup \{\gamma_0\}$ *სიმრავლე წარმოადგენს* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის დაუყვან წარმომქმნელთა სისტემას.*

დამტკიცება. $a)$, $b)$ და $c)$ დებულებების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდი-ნარეობს შესაბამისად ლემა 1.2.5, 1.2.6 და 1.2.7-დან.

თეორემა 3.2.5. *ვთქვათ,* $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_1(X,3)$. *თუ* X *სასრული სიმრავლეა და* $|X| = n$, *მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:*

a) *თუ* $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$, *მაშინ* $|B \cup B_1|$ *ელემენტთა რაოდენობა, აღებული* $B \cup B_1$ *სიმრავლიდან, ტოლია*

$$\left|B\cup B_1\right| = 3^n - 2^{n+1} + 1\,;$$

b) *თუ* $|X|\geq 3$, $X=\breve{D}$, $\gamma_0=\left(Z_1\times\varnothing\right)\cup\left(\left(X\setminus Z_1\right)\times Z_1\right)$, *მაშინ* $\left|B\cup B_1\cup\left\{\gamma_0\right\}\right|$ *ელემენტთა რაოდენობა, აღებული* $B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}$ *სიმრავლიდან, ტოლია*

$$\left|B\cup B_1\cup\left\{\gamma_0\right\}\right| = 3^n - 2^{n+1} + 2\,;$$

c) *თუ* $|X|=2$, *მაშინ* $\left|B_1\cup\left\{\gamma_0\right\}\right|$ *ელემენტთა რაოდენობა, აღებული* $B_1\cup\{\gamma_0\}$ *სიმრავლიდან, ტოლია* $\left|B_1\cup\left\{\gamma_0\right\}\right|=3$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $B=\left\{\alpha\in B_X\left(D\right)\,|\,V\left(X^*,\alpha\right)=D\right\}$ და

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \varphi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \varphi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$
$$\varphi_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \varphi_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ \varphi_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

თუ $\alpha\in B$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე: $\alpha=\left(Y^{\alpha}_{\varphi_j(1)}\times\varnothing\right)\cup\left(Y^{\alpha}_{\varphi_j(2)}\times Z_1\right)\cup\left(Y^{\alpha}_{\varphi_j(3)}\times\breve{D}\right)$, სადაც $j=1,2,\ldots,5,6$ და X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $Y^{\alpha}_{\varphi_j(1)},Y^{\alpha}_{\varphi_j(2)},Y^{\alpha}_{\varphi_j(3)}\notin\left\{\varnothing\right\}$ სისტემა წარმოადგენს X სიმრავლის დანაწილებას. მაშინ X სიმრავლის $Y^{\alpha}_{\varphi_j(1)},Y^{\alpha}_{\varphi_j(2)},Y^{\alpha}_{\varphi_j(3)}$ დანაწილებათა k_n^3 რაოდენობა ფიქსირებულ j-თვის $\left(1\leq j\leq 6\right)$ ტოლია

$$k_n^3=\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(-1\right)^{3+i}}{\left(i-1\right)!\left(3-i\right)!}\cdot i^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}+\frac{1}{2}\,.$$

(იხ , თეორემა 1.0.2). აქედან მივიღებთ, რომ $\left|B\right|=6\cdot k_n^3=3^n-3\cdot 2^n+3$.

თუ $\alpha\in B_1$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე: $\alpha=\left(Y_1^{\alpha}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_1^{\alpha},Y_0^{\alpha}$ სისტემა წარმოადგენს X სიმრავლის დანაწილებას. B_1 სიმრავლის განმარტების მიხედვით მივიღებთ: $B_1=B_X\left(D'\right)\setminus\left\{X\times Z_1,X\times\breve{D}\right\}$, სადაც $D'=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}$. ამრიგად გვექნება: $\left|B_1\right|=\left|B_X\left(D'\right)\right|-2=2^{|X|}-2=2^n-2$. B, B_1 და $\left\{\gamma_0\right\}$ სიმრავლეების განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ $B\cap B_1=B\cap\left\{\gamma_0\right\}=B_1\cap\left\{\gamma_0\right\}=\varnothing$. აქედან კი მივიღებთ, რომ

$$\left|B\cup B_1\right|=\left(3^n-3\cdot 2^n+3\right)+\left(2^n-2\right)=3^n-2^{n+1}+1\,,$$

თუ $\left|X \setminus \breve{D}\right| \geq 1$;

$$\left|B \cup B_1 \cup \{\gamma_0\}\right| = \left(3^n - 2^{n+1} + 1\right) + 1 = 3^n - 2^{n+1} + 2,$$

თუ $|X| \geq 3$, $X = \breve{D}$;

$$\left|B_1 \cup \{\gamma_0\}\right| = 2^{|2|} - 2 + 1 = 3,$$

თუ $|X| = 2$.

თეორემა 1.2.5 დამტკიცებულია.

მაგალითი 1.2.2. ვთქვათ, $X = \{1,2,3\}$, $Z_1 = \{1\}$, $\breve{D} = \{1,2\}$, $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}$ და $\left|X \setminus \breve{D}\right| = 1$. მაშინ $B_X(D) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{27}\}$, სადაც

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (Z_1 \times \varnothing) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_2 = (Z_1 \times \varnothing) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times Z_1\right) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_3 = \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup (Z_1 \times Z_1) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_4 = \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_5 = \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \varnothing\right) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_6 = \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \varnothing\right) \cup (Z_1 \times Z_1) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_7 = (Z_1 \times Z_1) \cup \left(\{2,3\} \times \breve{D}\right),\ \alpha_8 = \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times Z_1\right) \cup \left(\{1,3\} \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_9 = \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times Z_1\right) \cup \left(\breve{D} \times \breve{D}\right),\ \alpha_{10} = \left(\breve{D} \times Z_1\right) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_{11} = \left(\{1,3\} \times Z_1\right) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right),\ \alpha_{12} = \left(\{2,3\} \times Z_1\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_{13} = \left(\breve{D} \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times Z_1\right),\ \alpha_{14} = \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \varnothing\right) \cup \left(\breve{D} \times Z_1\right),\\
&\alpha_{15} = \left(\breve{D} \times \varnothing\right) \cup \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \breve{D}\right),\ \alpha_{16} = \left(\{1,3\} \times \varnothing\right) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_{17} = \left(\{2,3\} \times \varnothing\right) \cup \left(Z_1 \times \breve{D}\right),\ \alpha_{18} = \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup \left(\{1,3\} \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_{19} = \left(\left(X \setminus \breve{D}\right) \times \varnothing\right) \cup \left(\breve{D} \times \breve{D}\right),\ \alpha_{20} = (Z_1 \times \varnothing) \cup \left(\{2,3\} \times \breve{D}\right),\\
&\alpha_{21} = \left(\{1,3\} \times \varnothing\right) \cup \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times Z_1\right),\ \alpha_{22} = (Z_1 \times \varnothing) \cup \left(\{2,3\} \times Z_1\right),\\
&\alpha_{23} = \left(\{2,3\} \times \varnothing\right) \cup (Z_1 \times Z_1),\ \alpha_{24} = \left(\left(\breve{D} \setminus Z_1\right) \times \varnothing\right) \cup \left(\{1,3\} \times Z_1\right),\\
&\alpha_{25} = \varnothing,\ \alpha_{26} = \{1,2,3\} \times Z_1,\ \alpha_{27} = \{1,2,3\} \times \breve{D}.
\end{aligned}$$

$B = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6\}$, $B_1 = \{\alpha_7, \alpha_8, ..., \alpha_{12}\}$ და $\left|B \cup B_1\right| = 12$.

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}
α_1	α_{13}	α_{15}	α_{22}	α_{20}	α_{20}	α_1	α_1	α_{20}	α_{20}	α_{22}	α_1	α_{20}
α_2	α_{21}	α_{16}	α_{22}	α_{20}	α_{20}	α_2	α_2	α_{20}	α_{20}	α_{22}	α_2	α_{20}

α_3	α_{13}	α_{15}	α_{24}	α_{18}	α_{18}	α_{18}	α_3	α_{18}	α_{18}	α_{24}	α_3	α_{18}
α_4	α_{23}	α_{17}	α_{24}	α_{18}	α_{18}	α_4	α_4	α_{18}	α_{18}	α_{24}	α_4	α_{18}
α_5	α_{23}	α_{17}	α_{14}	α_{19}	α_{19}	α_5	α_5	α_{19}	α_{19}	α_{14}	α_5	α_{19}
α_6	α_{21}	α_{16}	α_{14}	α_{19}	α_{19}	α_6	α_6	α_{19}	α_{19}	α_{14}	α_6	α_{19}
α_7	α_{22}	α_{20}	α_{26}	α_{27}	α_{27}	α_7	α_7	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_7	α_{27}
α_8	α_{24}	α_{24}	α_{26}	α_{27}	α_{27}	α_8	α_8	α_{27}	α_{27}	α_{26}	α_8	α_{27}
α_9	α_{14}	α_{19}	α_{26}	α_9	α_{27}	α_9	α_9	α_{27}	α_{27}	α_{26}	α_9	α_{27}
α_{10}	α_{13}	α_{15}	α_{26}	α_{27}	α_{27}	α_{10}	α_{10}	α_{27}	α_{27}	α_{26}	α_{10}	α_{27}
α_{11}	α_{21}	α_{16}	α_{26}	α_{27}	α_{27}	α_{11}	α_{11}	α_{27}	α_{27}	α_{26}	α_{11}	α_{27}
α_{12}	α_{17}	α_{23}	α_{26}	α_{27}	α_{27}	α_{12}	α_{12}	α_{27}	α_{27}	α_{26}	α_{12}	α_{27}

ამ შემთხვევაში გვექნება, რომ $\alpha_2 \circ \alpha_3 \circ \alpha_2 = \alpha_{22} \circ \alpha_2 = \alpha_{25}$, ე.ი. $B \cup B_1$ სიმრავლე არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სისტემა.

მაგალითი 1.2.3. ვთქვათ, $X = \{1,2,3\} = \breve{D}$, $Z_1 = \{1,2\}$, $D = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}$ $X = \breve{D}$. მაშინ $B_X(D) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{27}\}$, სადაც

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (\{1\}\times\varnothing)\cup(\{2\}\times Z_1)\cup(\{3\}\times \breve{D}),\ \alpha_2 = (\{1\}\times\varnothing)\cup(\{3\}\times Z_1)\cup(\{2\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_3 = (\{2\}\times\varnothing)\cup(\{1\}\times Z_1)\cup(\{3\}\times \breve{D}),\ \alpha_4 = (\{2\}\times\varnothing)\cup(\{3\}\times Z_1)\cup(\{1\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_5 = (\{3\}\times\varnothing)\cup(\{2\}\times Z_1)\cup(\{1\}\times \breve{D}),\ \alpha_6 = (\{3\}\times\varnothing)\cup(\{1\}\times Z_1)\cup(\{2\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_7 = (\{1\}\times Z_1)\cup(\{2,3\}\times \breve{D}),\ \alpha_8 = (\{2\}\times Z_1)\cup(\{1,3\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_9 = (\{3\}\times Z_1)\cup(Z_1\times \breve{D}),\ \alpha_{10} = (Z_1\times Z_1)\cup(\{3\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_{11} = (\{1,3\}\times Z_1)\cup(\{2\}\times \breve{D}),\ \alpha_{12} = (\{2,3\}\times Z_1)\cup(\{1\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_{13} = (\{3\}\times\varnothing)\cup(Z_1\times Z_1),\ \alpha_{14} = (Z_1\times\varnothing)\cup(\{3\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_{15} = (Z_1\times\varnothing)\cup(\{3\}\times Z_1) = \gamma_0,\ \ \alpha_{16} = (\{1,3\}\times\varnothing)\cup(\{2\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_{17} = (\{2,3\}\times\varnothing)\cup(\{1\}\times \breve{D}),\ \alpha_{18} = (\{2\}\times\varnothing)\cup(\{1,3\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_{19} = (\{3\}\times\varnothing)\cup(Z_1\times \breve{D}),\ \alpha_{20} = (\{1\}\times\varnothing)\cup(\{2,3\}\times \breve{D}),\\
&\alpha_{21} = (\{1,3\}\times\varnothing)\cup(\{2\}\times Z_1),\ \alpha_{22} = (\{1\}\times\varnothing)\cup(\{2,3\}\times Z_1),\\
&\alpha_{23} = (\{2,3\}\times\varnothing)\cup(\{1\}\times Z_1),\ \alpha_{24} = (\{2\}\times\varnothing)\cup(\{1,3\}\times Z_1),\\
&\alpha_{25} = \varnothing,\ \alpha_{26} = \{1,2,3\}\times Z_1,\ \alpha_{27} = \{1,2,3\}\times \breve{D}.
\end{aligned}$$

$B=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_6\}$, $B_1=\{\alpha_7,\alpha_8,...,\alpha_{12}\}$, $\gamma_0=\alpha_{15}$ და $\left|B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}\right|=13$.

$\circ$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	γ_0
α_1	α_1	α_{20}	α_1	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_1	α_{20}	α_{20}	γ_0
α_2	α_2	α_{20}	α_2	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{20}	α_{21}
α_3	α_3	α_{18}	α_3	α_4	α_{17}	α_{18}	α_{18}	α_{18}	α_{18}	α_3	α_4	α_4	γ_0
α_4	α_4	α_{18}	α_4	α_4	α_4	α_{18}	α_{18}	α_{18}	α_{18}	α_4	α_{18}	α_{18}	α_{23}
α_5	α_5	α_{19}	α_5	α_{17}	α_5	α_{19}	α_{19}	α_{19}	α_{19}	α_5	α_{19}	α_{19}	α_{23}
α_6	α_6	α_{19}	α_6	α_{19}	α_{19}	α_{19}	α_{19}	α_{19}	α_{19}	α_6	α_{19}	α_5	α_{21}
α_7	α_7	α_9	α_7	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_7	α_{27}	α_{27}	α_7	α_{27}	α_{27}	α_{22}
α_8	α_8	α_{27}	α_8	α_8	α_8	α_{27}	α_{27}	α_8	α_{27}	α_8	α_7	α_{27}	α_{22}
α_9	α_9	α_{27}	α_9	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_9	α_{26}	α_{27}	α_{27}	α_{13}
α_{10}	α_{10}	α_9	α_{10}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{10}	α_{27}	α_{27}	γ_0
α_{11}	α_{11}	α_{19}	α_{11}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{11}	α_{27}	α_{27}	α_{21}
α_{12}	α_{12}	α_{27}	α_{12}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{27}	α_{12}	α_{27}	α_{27}	α_{23}
γ_0	γ_0	α_{14}	γ_0	α_{14}	α_{14}	α_{14}	α_{14}	α_{14}	α_{14}	α_{14}	α_{14}	α_{14}	α_{25}

ამ შემთხვევაში გვექნება: $\alpha_{11}\circ\alpha_{15}\circ\alpha_9=\alpha_{11}\circ\alpha_{14}=\alpha_{16}$ და $\alpha_3\circ\alpha_9\circ\alpha_{15}=\alpha_{18}\circ\alpha_{15}=\alpha_{24}$, ე.ი. $B\cup B_1\cup\{\gamma_0\}$ სიმრავლე არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სისტემა.

თავი II

$\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები

მოცემულ თავში გამოყვანილია $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერის ფორმალური ტოლობები. სრულად არის გადმოცემული $\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, სასრული X სიმრავლის შემთხვევაში მოცემულია შესაბამისი ნახევარ-ჯგუფების იდემპოტენტურ ელემენტთა რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულები.

დასაწყისისთვის ჩამოვაყალიბოთ რამდენიმე განმარტება, თეორემა და შედეგი.

განმარტება 2.0.1 იტყვიან, რომ D გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერი წარმოადგენს გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერს, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

ა) $\Lambda(D,D_t)\in D$ ნებისმიერი $t\in\breve{D}$,

ბ) $Z=\bigcup_{t\in Z}\Lambda(D,D_t)$, ნებისმიერი არაცარიელი Z ელემენტისთვის აღებული D ნახევარმესერიდან.

(იხ. [1], განმარტება 2.14.2)

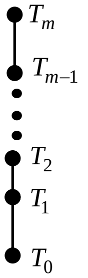
თეორემა 2.0.1 ვთქვათ, X სასრული სიმრავლეა δ და q შესაბამისად არიან D_ζ ნახევარმესერის ბაზისურ წყაროთა და ავტომორფიზმთა რაოდენობები. თუ $|X|=n\geq\delta$ და $\left|\sum_n(X,m)\right|=s$, მაშინ

$$s=\frac{1}{p}\cdot\sum_{p=\delta}^{m}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\left(\frac{(-1)^{p+i+1}\cdot C_{m-\delta}^{p-\delta}\cdot(\delta!)\cdot((p-\delta)!)\cdot i^n}{(i-1)!\cdot(p-i+1)!}\right)\right).$$

(იხ. [1] თეორემა **11.5.1.**)

თეორემა 2.0.2 ვთქვათ, D არის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერი. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი შეიცავს მარჯვენა ერთეულს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა D წარმოადგენს გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერს. (იხ. [1], თეორემა 6.1.3)

თეორემა 2.0.3 ვთქვათ, $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m\geq 1)$ (იხ. ნახ. 2.0.1) არის



ნახ. 2.0.1

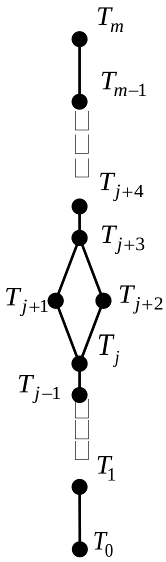
გაერთიანებათა $-$ ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ

$$T_0\subset T_1\subset T_2\subset...\subset T_m\,.$$

მაშინ წარმოადგენს გაერთიანებათა $-$ ნახევარმესერს.

(იხ. [1] თეორემა 11.6.1)

თეორემა 2.0.4. ვთქვათ $Q=\{T_1,T_2,T_3,...,T_m\}$ $(m\geq 3)$ (იხ. ნახ. 2.0.2) არის გაერთიანებათა ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი და $j-$ ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი , რომ $0\leq j\leq m-3$ და



$$\begin{aligned}
&T_0\subset T_1\subset...\subset T_j\subset T_{j+1}\subset T_{j+3}\subset...\subset T_m,\\
&T_0\subset T_1\subset...\subset T_j\subset T_{j+2}\subset T_{j+3}\subset...\subset T_m,\\
&T_{j+1}\setminus T_{j+2}\neq\varnothing, T_{j+2}\setminus T_{j+1}\neq\varnothing,\\
&T_{j+1}\cup T_{j+2}=T_{j+3}
\end{aligned}$$

მაშინ ყოველთვის წარმოადგენს გაერთიანებათა XI -ნახევარმესერს.

(იხ. [1] თეორემა 11.6.3)

თეორემა 2.0.5. თუ Q არის ბადე, მაშინ ის წარმოადგენს გაერთიანებათა XI ნახევარმესერს.

ნახ. 2.0.2

(იხ. [1] თეორემა 11.7.2)

თეორემა 2.0.6. ვთქვათ, D გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერის Q ქვენახევარმესერი სიმრავლეთა ოჯახია. მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას, თუ $Q=V(D,\alpha)$, აქვს შემდეგი სახე:

$$\alpha=\bigcup_{T_{ij}\in Q}\left(Y_{ij}^{\alpha}\times T_{ij}\right),$$

წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტურ ელემენტს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი პირობები:

$$Y_{00}^{\alpha} \supseteq T_{0k} \cap T_{s0},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq T_{01},$$
$$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq T_{02}, \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup$$
$$\cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq T_{0k},$$
$$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq T_{10},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup$$
$$\cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq T_{s0},\ Y_{ij}^{\alpha} \cap T_{ij} \neq \varnothing$$

ნებისმიერი $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$. (იხ. [1] თეორემა 13.7.2)

თეორემა 2.0.7. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული α ელემენტი წარმოადგენს იდემპოტენტს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა φ ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $\varphi = \alpha$ ნებისმიერი $\in$ α, არის α ნახევარმესერის იგივური ასახვა. (იხ. [1] თეორემა 6.3.7.)

თეორემა 2.0.8. ვთქვათ D, $\Sigma(D)$, $E_X^{(r)}(D')$ და I შესაბამისად წარმოადგენენ გაერთიანებათა სრულ $X-$ნახევარმესერს, D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერთა სიმრავლეს, $B_X(D')$ $(D' \in \Sigma(D))$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეულების სიმრავლეს და $B_X(D')$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტების სიმრავლეს. მაშინ $E_X^{(r)}(D')$ და I სიმრავლეებისთვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) თუ $\varnothing \in D$ და $\Sigma_{\varnothing}(D) = \{D' \in \Sigma(D) \mid \varnothing \in D'\}$, მაშინ

1) $E_X^{(r)}(D') \cap E_X^{(r)}(D'') = \varnothing$ ნებისმიერი D' და D'' აღებული $\Sigma_{\varnothing}(D)$ სიმრავლიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $D' \neq D''$;

2) $I = \bigcup_{D' \in \Sigma_{\varnothing}(D)} E_X^{(r)}(D')$

3) სასრულო X სიმრავლისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$|I| = \sum_{D' \in \Sigma_{\varnothing}(D)} \left| E_X^{(r)}(D') \right|$$

b) თუ $\varnothing \notin D$, მაშინ

1) $E_X^{(r)}(D') \cap E_X^{(r)}(D'') = \varnothing$ ნებისმიერი D' და D'' აღებული $\Sigma(D)$ სიმრავლიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $D' \neq D''$;

2) $I = \bigcup_{D' \in \Sigma(D)} E_X^{(r)}(D')$;

3) სასრულო X სიმრავლისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$|I| = \sum_{D' \in \Sigma(D)} \left| E_X^{(r)}(D') \right|.$$

(იხ. [1] თეორემა 6.2.3.)

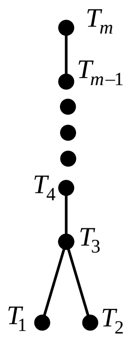
თეორემა 2.0.9. ვთქვათ, არის $B_X(D')$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტურ ელემენტთა სიმრავლე. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

a) $' \cap \; '' = \varnothing$, ნებისმიერი $' \; '' \in \Sigma$ და $' \neq \; ''$;

b) $= \bigcup_{' \in \Sigma} \; ^{*} \; '$;

c) თუ – სასრულო სიმრავლეა, მაშინ $|\;| = \sum_{' \in \Sigma} \left| ^{*} \; ' \right|$. (იხ. [1] თეორემა 6.3.13.)

თეორემა 2.0.10 $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი იდემპოტენტური ბინარული ε მიმართებისთვის $G_X(D,\varepsilon)$ ჯგუფი ანტიიზომორფულია $V(D,\varepsilon)$ ნახევარმესერის ყველა სრულ ავტომორფიზმთა ჯგუფისა. (იხ. [1] თეორემა 7.4.2.)



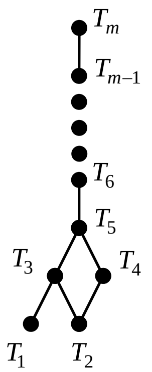
ნახ. 2.0.3

თეორემა 2.0.11. ვთქვათ, $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$ $(m \geq 3)$ (იხ. ნახ. 2.0.3) არის გაერთიანებათა ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ

$$T_1, T_2 \not\in \{\varnothing\}, \; T_1 \cup T_2 = T_3$$

და $T_3 \subset T_4 \subset ... \subset T_m$,მაშინ წარმოადგენს გაერთიანებათა – ნახევარმესერს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $T_1 \cap T_2 = \varnothing$.

(იხ. [1] თეორემა **11.6.2**.)



ნახ. 2.0.4

თეორემა 2.0.12 ვთქვათ, $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$ $(m \geq 5)$ (იხ. ნახ. 2.0.4) არის გაერთიანებათა ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset ... \subset T_m, \; T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset ... \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset ... \subset T_m, \; T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing, \; T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,$$
$$T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing, \; T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing, \; T_1 \cup T_2 = T_3, \; T_3 \cup T_4 = T_5$$

მაშინ წარმოადგენს გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $T_1 \cap T_4 = \varnothing$. (იხ. [1] თეორემა **11.6.4**.)

შედეგი 2.0.1. ვთქვათ, $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m\geq 1)$ არის გაერთიანებათა ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_0\subset T_1\subset ...\subset T_m$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე: $\alpha=\bigcup_{i=0}^{m}\left(Y_i^{\alpha}\times T_i\right)$, სადაც $Q=V(D,\alpha)$, წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტურ ელემენტს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y_0^{\alpha}\cup Y_1^{\alpha}\cup ...\cup Y_p^{\alpha}\supseteq T_p$ და $Y_q^{\alpha}\cap T_q\neq\varnothing$ ნებისმიერი $p=0,1,...,m-1$ და $q=1,2,...,m$.(იხ. [1] შედეგი 13.1.1)

შედეგი 2.0.2 ვთქვათ, $Q=\left\{T_0,T_1,...,T_j,...,T_m\right\}$ $(m\geq 3)$ არის ისეთი ნახევარმესერი და j - ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი, რომ $0\leq j\leq m-3$ და

$$
\begin{aligned}
&T_0\subset T_1\subset ...\subset T_j\subset T_{j+1}\subset T_{j+3}\subset ...\subset T_m,\\
&T_0\subset T_1\subset ...\subset T_j\subset T_{j+2}\subset T_{j+3}\subset ...\subset T_m,\\
&T_{j+1}\setminus T_{j+2}\neq\varnothing, T_{j+2}\setminus T_{j+1}\neq\varnothing, T_{j+1}\cup T_{j+2}=T_{j+3}.
\end{aligned}
$$

მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე: $\alpha=\bigcup_{i=0}^{m}\left(Y_i^{\alpha}\times T_i\right)$, სადაც $=(\quad\alpha)$, წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტურ ელემენტს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$
\begin{aligned}
&Y_0^{\alpha}\cup Y_1^{\alpha}\cup ...\cup Y_j^{\alpha}\supseteq T_{j+1}\cap T_{j+2},\\
&Y_0^{\alpha}\cup Y_1^{\alpha}\cup ...\cup Y_j^{\alpha}\cup Y_{j+2}^{\alpha}\supseteq T_{j+2},\\
&Y_0^{\alpha}\cup Y_1^{\alpha}\cup ...\cup Y_p^{\alpha}\supseteq T_p,\ Y_q^{\alpha}\cap T_q\neq\varnothing
\end{aligned}
$$

ნებისმიერი $p=0,1,2,...,m-1$, $q=1,2,...,m$ $(p\neq j+2,\ q\neq j+3)$.

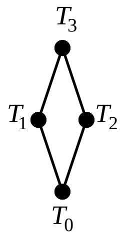
(იხ. [1] შედეგი 13.3.1)

შედეგი 2.0.3. ვთქვათ, $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m\geq 1)$ არის ისეთი ნახევარმესერი, რომ $T_0\subset T_1\subset ...\subset T_m$. თუ $^{(\ )}(\ )$ არის $(\ )$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე, მაშინ

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right|=\left(2^{|T_1\setminus T_0|}-1\right)\cdot\left(3^{|T_2\setminus T_1|}-2^{|T_2\setminus T_1|}\right)\cdots\left((m+1)^{|T_m\setminus T_{m-1}|}-m^{|T_m\setminus T_{m-1}|}\right)\cdot(m+1)^{|X\setminus T_m|}.$$

(იხ. [1] შედეგი 13.1.5)

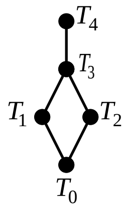
შედეგი 2.0.4. ვთქვათ, $Q=\{T_0,T_1,T_2,T_3\}$ არის (იხ. ნახ. 2.0.5) ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ



ნახ.2.0.5

$$T_0\subset T_1\subset T_3,\ T_0\subset T_2\subset T_3,$$
$$T_1\setminus T_2\neq\varnothing,\ T_2\setminus T_1\neq\varnothing,\ T_1\cup T_2=T_3.$$

თუ $Q=\{T_0,T_1,T_2,T_3\}$ და $D'=\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3\}$ $XI-$ნახევარმესერები არიან $\alpha-$იზომორფული და $|\Omega(Q)|=m_0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

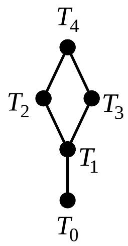


ნახ. 2.0.6

$$|R(D')|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\overline{T}_3|}.$$

(იხ. [1] შედეგი 13.3.1)

შედეგი 2.1.5. ვთქვათ, $T_0,T_1,T_2,T_3,T_4\in D$ (იხ. ნახ. 2.0.6) და



ნახ. 2.0.7

$$T_0\subset T_1\subset T_3\subset T_4,\ T_0\subset T_2\subset T_3\subset T_4,$$
$$T_1\setminus T_2\neq\varnothing,\ T_2\setminus T_1\neq\varnothing,\ T_1\cup T_2=T_3.$$

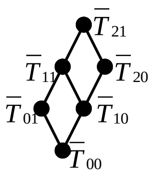
თუ $Q=\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_4\}$ და $D'=\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3,\overline{T}_4\}$ $XI-$ნახევარმესერები არიან $\alpha-$იზომორფული და $|\Omega(Q)|=m_0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$|R(D')|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}-1\right)\cdot\left(5^{|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3|}-4^{|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\overline{T}_4|}.$$

(იხ. [1] შედეგი 13.3.5)

შედეგი 2.0.6. ვთქვათ, $T_0,T_1,T_2,T_3,T_4\in D$ (იხ. ნახ. 2.0.7) და

$$T_0\subset T_1\subset T_2\subset T_4,\ T_0\subset T_1\subset T_3\subset T_4,$$
$$T_2\setminus T_3\neq\varnothing,\ T_3\setminus T_2\neq\varnothing,\ T_2\cup T_3=T_4.$$



ნახ. 2.0.8

თუ $Q=\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_4\}$ და $D'=\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3,\overline{T}_4\}$ $XI-$ნახევარმესერები არიან $\alpha-$იზომორფული და $|\Omega(Q)|=m_0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$|R(D')|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{|T_1\setminus T_0|}-1\right)\cdot 2^{|(\overline{T}_2\cap\overline{T}_3)\setminus\overline{T}_1|}\cdot$$
$$\cdot\left(3^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_3|}-2^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_3|}\right)\cdot\left(3^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_2|}-2^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\overline{T}_4|}.$$

(იხ. [1] შედეგი 13.3.6)

შედეგი 2.0.7. ვთქვათ, D ნახევარმესერის $Q=\{T_{00},T_{01},T_{10},T_{11},T_{20},T_{21}\}$ (იხ. ნახ. 2.0.8)

ქვენახევარმესერი არის სიმრავლეთა ოჯახი. თუ Q ოჯახი და

$$D'=\left\{\overline{T}_{00},\overline{T}_{01},\overline{T}_{10},\overline{T}_{11},\overline{T}_{20},\overline{T}_{21}\right\}$$

ნახევარმესერი არიან α — იზომორფულები და $\left|\Omega\left(Q\right)\right|=m_0$, მაშინ

სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\left|R\left(D'\right)\right|=m_0\cdot\left(2^{\left|\overline{T}_{01}\setminus\overline{T}_{20}\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|\overline{T}_{10}\setminus\overline{T}_{01}\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\overline{T}_{20}\setminus\overline{T}_{11}\right|}-2^{\left|\overline{T}_{20}\setminus\overline{T}_{11}\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\overline{T}_{21}\right|}$$

(იხ. [1] შედეგი 13.7.3)

2.1 $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების ძირითადი თვისებები

მოცემულ პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების ძირითადი თვისებები და $|X|=n\geq 5$ შემთხვევაში გამოყვანილია $\Sigma_4(X,8)$ კლასში ნახევარმესერთა რაოდენობის დასათვლელი ფორმულა.

ვთქვათ, X არაცარიელი სიმრავლეა, D არის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერი, ე.ი. არის X სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა ისეთი სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია D-ს ელემენტების თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციების მიმართ, f არის ასახვა X სიმრავლისა D-ში. მაშინ ყოველი ასეთი f ასახვისათვის X სიმრავლეზე განისაზღვრება α_f ბინარული მიმართება, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\alpha_f=\bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right).$$

ყველა ასეთ α_f ბინარულ მიმართებათა სიმრავლე ($f:X\rightarrow D$) აღინიშნება $B_X(D)$ სიმბოლოთი. ადვილად მტკიცდება, რომ $B_X(D)$ წარმოადგენს ნახევარჯგუფს ბინარულ მიმართებათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ, რომელსაც

ეწოდება D გაერთიანებითა სრული $X-$ ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი. (იხ. [1, პუნქტი 2.1]

$\varnothing$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X სიმრავლის ცარიელი ქვესიმრავლე. თუ $(x,y)\in\alpha$, მაშინ ეს ჩაიწერება შემდეგნაირად: $x\alpha y$. ახლა ვთქვათ

$$x,y\in X\ ,\ Y\subseteq X\ ,\ \alpha\in B_X(D)\ ,$$

$$T\in D\ ,\ \varnothing\neq D'\subseteq D,$$

$$\breve{D}=\cup D\ ,\ t\in\breve{D}\ .$$

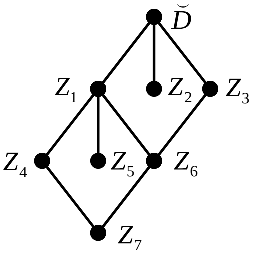
შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}
&y\alpha=\left\{x\in X\mid y\alpha x\right\},\\
&Y\alpha=\bigcup_{y\in Y}y\alpha,\ 2^X=\left\{Y\mid Y\subseteq X\right\},\\
&X^*=2^X\setminus\left\{\varnothing\right\},V\left(D,\alpha\right)=\left\{Y\alpha\mid Y\in D\right\},\\
&D'_T=\left\{T'\in D'\mid T\subseteq T'\right\},\\
&\ddot{D}'_T=\left\{T'\in D'\mid T'\subseteq T\right\},\\
&D'_t=\left\{Z'\in D'\mid t\in Z'\right\},\\
&l\left(D',T\right)=\cup\left(D'\setminus D'_T\right).
\end{aligned}$$

$\Lambda(D,D')$ სიმბოლოთი აღინიშნება D ნახევარმესერში D' სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი.

განმარტება 2.1.1. *ვთქვათ,* $\alpha\in B_X(D)$ *. თუ* $\alpha\circ\alpha=\alpha$ *ნებისმიერი* $\alpha\in B_X(D)$ *, მაშინ ბინარულ მიმართებას შესაბამისად ეწოდება* $B_X(D)$ *ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი.*

ვთქვათ X და $\Sigma_4(X,8)$ შესაბამისად ნებისმიერ არაცარიელ სიმრავლეს და გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერთა იმ კლასს წარმოადგენს, რომლის ყოველი ელემენტი $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესრის იზომორფულია, სადაც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:



ნახ.2.1.1

$$\begin{gathered}
Z_7 \subset Z_4 \subset Z_1 \subset \breve{D},\\
Z_7 \subset Z_6 \subset Z_1 \subset \breve{D},\\
Z_7 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset \breve{D},\\
Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\\
Z_1 \setminus Z_3 \neq \varnothing,\ Z_3 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\\
Z_2 \setminus Z_3 \neq \varnothing,\ Z_3 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\\
Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\\
Z_4 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_6 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\\
Z_5 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_6 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\\
Z_1 \cup Z_2 = Z_1 \cup Z_3 = \breve{D},\\
Z_2 \cup Z_3 = Z_4 \cup Z_2 = Z_4 \cup\\
Z_3 = Z_5 \cup Z_2 = Z_5 \cup Z_3 = \breve{D},\\
Z_4 \cup Z_5 = Z_4 \cup Z_6 = Z_5 \cup Z_6 = Z_1.
\end{gathered}$$

...2.1.1

$X-$ ნახევარმესერი, რომელიც აკმაყოფილებს 2.1.1 პირობებს, მოცემულია ნახ. 2.1.1-ზე.

დავუშვათ, რომ $C(D)=\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7\}$, სადაც $P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6$ და P_7 არიან X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები და

$$\varphi=\begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ P_7 & P_6 & P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}$$

ასახვაა D გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერისა $C(D)$ სიმრავლეთა ოჯახზე. მაშინ მოცემულ D ნახევარმესერის ფორმალურ ტოლობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
\breve{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_1 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_2 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_3 &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_4 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_5 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7,\\
Z_6 &= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_7,\\
Z_7 &= P_0 \cup P_2 \cup P_5.
\end{aligned}$$

სადაც $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 \notin \{\varnothing\}$ და $|P_0|\geq 0,\ |P_6|\geq 0$ და $|P_7|\geq 0$ ე.ი. P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 ელემენტები ბაზისურ წყაროებს წარმოადგენენ, ხოლო P_0, P_6 და P_7 ელემენტი კი სისავსის წყაროებია. ამიტომაც ბაზისურ წყაროთა რიცხვი $\delta=$, ხოლო $|X|\geq 5$.

ლემა 2.1.1 ვთქვათ, $D\in\Sigma_4(X,8)$ და სასრული სიმრავლეა. თუ $|X|=n\geq 5$ და $\left|\Sigma_4(X,8)\right|=s$, მაშინ D ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმთა რაოდენობა $q=1$ და

$$s=9^n-5\cdot 8^n+10\cdot 7^n-10\cdot 6^n+5\cdot 5^n-4^n$$

დამტკიცება: მოცემული კლასის ნახევარმესერების განმარტებიდან გვაქვს, რომ $=$, ბაზისურ წყაროთა რიცხვი $\delta=5$, ხოლო ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რიცხვი $q=1$. თუ პირობებს $=$, $\delta=5$ და $q=1$ გავითვალისწინებთ თეორემა $1.1.1-$ში მივიღებთ:

$$s=\sum_{p=5}^{8}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\left(\frac{(-1)^{p+i+1}\cdot C_{8-5}^{p-5}\cdot C_{p}^{5}\cdot(5!)\cdot((p-5)!)\cdot i^{n}}{(i-1)!\cdot(p-i+1)!}\right)\right).$$

Bბოლო ფორმულის გამარტივება მოგვცემს:

$$s=9^{n}-5\cdot 8^{n}+10\cdot 7^{n}-10\cdot 6^{n}+5\cdot 5^{n}-4^{n}.$$

ლემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2.1.1: ვთქვათ $n=5,6,7,8,9,10.$ მაშინ შესაბამისად მივიღებთ:

$s=120;\ 4\ 680;\ 107\ 520;\ 1\ 900\ 080;\ 28\ 594\ 440;\ 385\ 945\ 560;$

$\left|B_X(D)\right|=32\ 768;\ 262\ 144;\ 2\ 097\ 152;\ 16\ 777\ 216;\ 134\ 217\ 728.$

მიღებული რიცხვები გვიჩვენებს, რომ როცა $|X|=10$, მაშინ $\Sigma_4(X,8)$ კლასში ნახევარმესერთა რაოდენობა $385\ 945\ 560$-ის ტოლია, ხოლო ამ კლასის ნახევარმესერით განსაზღვრულ თითოეულ ნახევარჯგუფში ელემენტების რიცხვი ტოლია $134\ 217\ 728$-ის.

ლემა 2.1.2 ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ არის $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ ნახევარმესერით განსაზღვრულ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს მარჯვენა ერთეული არ გააჩნია.

დამტკიცება: თუ $D\in\Sigma_4(X,8)$, მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია მარჯვენა ერთეული, როცა სრულდება შემდეგი ორი პირობა (იხ. განმარტება 2.0.1 და თეორემა 2.0.2):

) $\wedge(D,D_t)\in D$ ნებისმიერი $t\in\breve{D}-$თვის, სადაც $D_t=\left\{Z\in\breve{D}\mid t\in Z\right\}$;

) D ნახევარმესერის ნებისმიერი არაცარიელი Z ელემენტისათვის სრულდება ტოლობა $Z=\bigcup_{t\in Z}\wedge\left(D,D_t\right)$.

მოცემული პირობების შესამოწმებლად ყოველი ელემენტისათვის, აღებული $\breve{}$ სიმრავლიდან, ვიპოვოთ $\wedge(D,D_t)$ ელემენტები. ნახევარმესერის ფორმალური ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ, რომ D_t სიმრავლეები D ნახევარმესერში შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$D_t=\begin{cases} D,\ t\in P_{0,} \\ \left\{Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ t\in P_1, \\ \left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ t\in P_2, \\ \left\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ t\in P_3, \\ \left\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ t\in P_4, \\ \left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ t\in P_5, \\ \left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ t\in P_6, \\ \left\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ t\in P_7. \end{cases}$$

ასეთ შემთხვევაში $\wedge(D,D_t)\notin D$ ნებისმიერი $t\in\breve{D}-$სათვის. გამომდინარე აქედან პირობა $\wedge(D,D_t)\in D$ არაა სამართლიანი არცერთი ელემენტისათვის აღებული $\breve{D}-$სიმრავლიდან, ე.ი. $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებათა სრულ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფებს მარჯვენა ერთეული არ გააჩნიათ.

ლემა დამტკიცებულია.

2.2. $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტების აღწერა.

ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ $\Sigma_4(X,8)$ კლასის D გაერთიანებათა $X-$ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფები.

შევნიშნოთ, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტის კვაზი-ნორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე:

$$\begin{aligned}\alpha = &\left(Y_7^{\alpha} \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^{\alpha} \times Z_6\right) \cup \\ &\cup \left(Y_5^{\alpha} \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^{\alpha} \times Z_4\right) \cup \\ &\cup \left(Y_3^{\alpha} \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^{\alpha} \times Z_2\right) \cup, \\ &\cup \left(Y_1^{\alpha} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right)\end{aligned}$$

სადაც

$$Y_7^{\alpha}, Y_6^{\alpha}, Y_5^{\alpha}, Y_4^{\alpha}, Y_3^{\alpha}, Y_2^{\alpha}, Y_1^{\alpha}, Y_0^{\alpha}$$

არიან X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები და მათი გაერთიანება კი $X-$ ის ტოლია.

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტების აღწერისათვის (იხ. თეორემა 2.0.8) უნდა გამოიყოს ბინარულ მიმართებათა ისეთი სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფები, რომელთაც მარჯვენა ერთეულები გააჩნიათ. ამისათვის ჯერ საჭიროა ვიპოვოთ D ნახევარმესერის ყველა ისეთი D' ქვენახევარმესერები, რომლებიც XI ნახევარმესერებს წარმოადგენენ და შემდეგ აღვწეროთ $B_X(D')$ ნახევარჯგუფთა მარჯვენა ერთეულები. ამასთან, რადგან $\varnothing \notin D$, ამიტომ უნდა ვიპოვოთ D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერი.

ლემა 2.2.1. ვთქვათ, $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_{4,} Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X, 8)$,

მაშინ შემდეგი სახის ქვესიმრავლეები:

1) $\{Z_7\}, \{Z_6\}, \{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 1 დიაგრამა);

2) $\{Z_7, Z_6\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_3\},$
$\{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3\},$
$\{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1\},$
$\{Z_5, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \breve{D}\},$
$\{Z_3, \breve{D}\}, \{Z_2, \breve{D}\}, \{Z_1, \breve{D}\}.$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-2 დიაგრამა);

3) $\{Z_7, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3\},$
$\{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\},$
$\{Z_6, Z_3, D\}, \{Z_6, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-3 დიაგრამა);

4) $\{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-4 დიაგრამა);

5) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\},$
$\{Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-5 დიაგრამა);

6) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-6 დიაგრამა);

7) $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-7 დიაგრამა);

8) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-8 დიაგრამა);

9) $\{Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_2, \breve{D}\},$
$\{Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\},$
$\{Z_6, Z_2, D\}, \{Z_5, Z_4, Z_1\},$
$\{Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_2, \breve{D}\},$
$\{Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, \breve{D}\},$
$\{Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_2, Z_1, \breve{D}\}.$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-9 დიაგრამა);

10) $\{Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-10 დიაგრამა);

11) $\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-11 დიაგრამა);

12) $\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-12 დიაგრამა);

13) $\{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-13 დიაგრამა);

14) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-14 დიაგრამა);

15) $\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-15 დიაგრამა);

16) $\{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-16 დიაგრამა);

17) $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-17 დიაგრამა);

18) $\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-18 დიაგრამა);

19) $\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-19 დიაგრამა);

20) $\{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის მე-20 დიაგრამა);

21) $\{Z_6, Z_{4,} Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 21-ე დიაგრამა);

22) $\{Z_7, Z_5, Z_{4,} Z_{2,} Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_{4,} Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 22-ე დიაგრამა);

23) $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 23 -ე დიაგრამა);

24) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_{4,} Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 24-ე დიაგრამა);

25) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 25-ე დიაგრამა);

26) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 26-ე დიაგრამა);

27) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 27-ე დიაგრამა);

28) $\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 28-ე დიაგრამა);

29) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 29-ე დიაგრამა);

30) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 30-ე დიაგრამა);

31) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 31-ე დიაგრამა);

32) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 32-ე დიაგრამა);

33) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.1-ის 33-ე დიაგრამა)

D ნახევარმესერის ყველა ქვენახევარმესერს ამოწურავს.

დამტკიცება: ცხადია, რომ D ნახევარმესერის ყველა ერთელემენტიანი ქვესიმრავლე მისი ქვენახევარმესერია.

D ნახევარმესერის ორელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^2 = 28$ -ის ტოლია, ეს ქვესიმრავლეებია:

$$
\begin{aligned}
&\{Z_7, Z_6\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_1\},\\
&\{Z_7, Z_3\}, \{Z_7, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_1\},\\
&\{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1\},\\
&\{Z_5, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \breve{D}\},\\
&\{Z_3, \breve{D}\}, \{Z_2, \breve{D}\}, \{Z_1, \breve{D}\};\\
&\{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_6, Z_5\},\\
&\{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_5, Z_4\},\\
&\{Z_5, Z_3\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_4, Z_3\},\\
&\{Z_4, Z_2\}, \{Z_3, Z_2\}, \{Z_3, Z_1\},\\
&\{Z_2, Z_1\}.
\end{aligned}
$$

მათგან D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერებია მხოლოდ ისინი, რომლებიც ჯაჭვებს წარმოადგენენ. D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად ჯაჭვებს არ წარმოადგენენ ბოლო ცამეტი სიმრავლე.

D ნახევარმესერის ყველა სამელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^3 = 56$ -ის ტოლია, ეს ქვესიმრავლეებია.

$$
\begin{aligned}
&\{Z_7, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, \breve{D}\},\\
&\{Z_7, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3\},\\
&\{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, D\},\\
&\{Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_7, Z_5, Z_1\},\\
&\{Z_7, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\},\\
&\{Z_6, Z_2, D\}, \{Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, \breve{D}\},\\
&\{Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, \breve{D}\},\\
&\{Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_2, Z_1, \breve{D}\};\\
&\{Z_7, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_3\},\\
&\{Z_7, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\},\\
&\{Z_6, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_2, Z_1\},\\
&\{Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_4, Z_2, Z_1\},\\
&\{Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_5, Z_2\},\\
&\{Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\},\\
&\{Z_7, Z_6, Z_5\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_4, Z_2\},\\
&\{Z_7, Z_5, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_4\},\\
&\{Z_7, Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_4, Z_3\},\\
&\{Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \breve{D}\},\\
&\{Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, \breve{D}\}.
\end{aligned}
$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო ოცდათორმეტი სიმრავლე გაერთიანებათა — ნახევარმესერს არ წარმოადგენს.

D ნახევარმესერის ყველა ოთხელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^4 = 70$ -ის ტოლია. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$\begin{array}{l}
\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\};\\
\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\\
\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\};\{Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\\
\{Z_6,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\};\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\\
\{Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\\
\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\
\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_2,\breve{D}\},\\
\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_1\},\{Z_7,Z_2,Z_1,\breve{D}\};\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_1\},\\
\{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\};\\
\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3\},\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_1\},\\
\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_6,Z_4,\breve{D}\},\\
\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2\},\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_2\},\\
\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3\},\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\},\\
\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3\},\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2\},\\
\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_2\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3\},\\
\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4\},\{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\\
\{Z_6,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\\
\{Z_6,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\\
\{Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_5,\breve{D}\},\\
\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1\},\{Z_6,Z_3,Z_2,Z_1\},\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1\},\\
\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1\},\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\},\\
\{Z_7,Z_3,Z_2,Z_1\},\{Z_6,Z_4,Z_2,Z_1\},\{Z_6,Z_5,Z_2,Z_1\},\\
\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1\},\{Z_7,Z_5,Z_2,Z_1\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\},\\
\{Z_7,Z_6,Z_2,Z_1\}.
\end{array}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო ორმოცდასამი ქვესიმრავლე გაერთიანებათა — ნახევარმესერს არ წრმოადგენს.

D ნახევარმესერის ხუთელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^5 = 56$ -ის ტოლია. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$
\begin{gathered}
\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}; \{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_1\}, \\
\{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \\
\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}; \\
\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}; \\
\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \\
\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \\
\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\}, \\
\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1\}, \\
\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}.
\end{gathered}
$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო ოცდაცამეტი სიმრავლე გაერთიანებათა — ნახევარმესერს არ წარმოადგენს.

D ნახევარმესერის ექვსელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^6 = 28$-ის ტოლია. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$
\begin{gathered}
\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}; \\
\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}; \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}; \\
\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}; \\
\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}; \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\} \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \\
\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}, \\
\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \\
\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}.
\end{gathered}
$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო ჩვიდმეტი ქვესიმრავლე გაერთიანებათა — ნახევარმესერს არ წარმოადგენს.

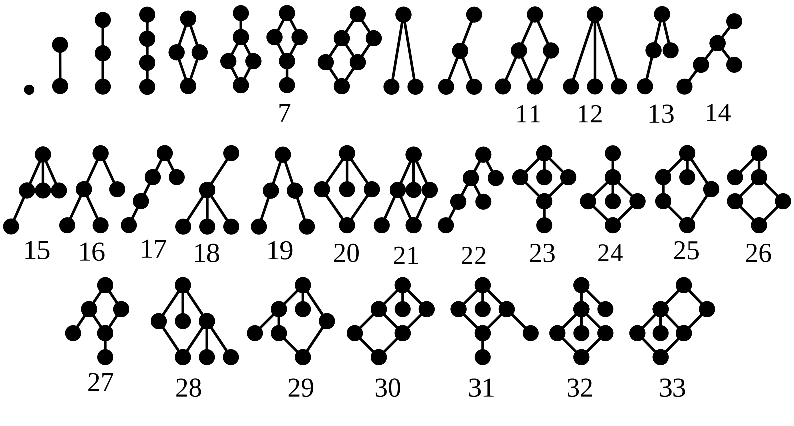
D ნახევარმესერის შვიდელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^7 = 8$ -ის ტოლია. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$
\begin{gathered}
\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\};\\
\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\};\\
\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\};\\
\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\};\\
\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\};\\
\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\};\\
\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1\},\\
\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}.
\end{gathered}
$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო ორი ქვესიმრავლე გაერთიანებათა — ნახევარმესერს არ წარმოადგენს.

ლემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული ლემიდან გამომდინარეობს, რომ ქვემოთ მოცემული დიაგრამები D ნახევარმესერის ყველა ქვენახევარმესერთა დიაგრამებს ამოწურავს.



ნახ.2.2.1

ლემა 2.2.2. ვთქვათ, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$.

მაშინ შემდეგი სახის ქვესიმრავლეები:

1) $\{Z_7\},\{Z_6\},\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.3-ის 1 დიაგრამა);

2) $\{Z_7, Z_6\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_3\},$
$\{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3\},$
$\{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1\},$
$\{Z_5, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \breve{D}\},$
$\{Z_3, \breve{D}\}, \{Z_2, \breve{D}\}, \{Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.3-ის მე-2 დიაგრამა);

3) $\{Z_7, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3\},$
$\{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, D\},$
$\{Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.3-ის მე-3 დიაგრამა);

4) $\{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.3-ის მე-4 დიაგრამა);

5) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\},$
$\{Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.3-ის მე-5 დიაგრამა);

6) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.3-ის მე-6 დიაგრამა);

7) $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.3-ის მე-7 დიაგრამა);

8) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

(იხ. ნახ.-2.2.3-ის მე-8 დიაგრამა);

D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერს ამოწურავს.

დამტკიცება. თუ ნახევარმესერები, რომელთა დიაგრამები ემთხვევა 2.2.1 ნახაზზე მოცემული 1-8 დიაგრამებიდან ერთ-ერთს, მაშინ 2.0.3, 2.04 და 2.0.5 თეორემების თანახმად, ისინი ყოველთვის იქნებიან D ნახევარმესერების $XI-$ ქვენახევარმესერები.

რაც შეეხება იმ ნახევარმესერებს, რომელთა დიაგრამები ემთხვევა $9-10$ დიაგრამებიდან ერთ-ერთს, თეორემა 2.0.11-ის თანახმად იქნებიან $XI-$ ნახევარ-მესერები მხოლოდ მაშინ, როცა მათი მინიმალური ელემენტების თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. ჩვენს შემთხვევაში მოცემული ნახევარმესერის ფორმალური ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
Z_7 \cap Z_5 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_5) \cap (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_2 \supseteq P_2 \neq \varnothing, \\
Z_7 \cap Z_2 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_5) \cap (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_5 \supseteq P_5 \neq \varnothing, \\
Z_6 \cap Z_5 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_7 \supseteq P_2 \cup P_4 \neq \varnothing, \\
Z_6 \cap Z_4 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_2 \cup P_5 \cup P_7 \supseteq P_2 \cup P_5 \neq \varnothing, \\
Z_6 \cap Z_2 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_7 \supseteq P_4 \cup P_5 \neq \varnothing, \\
Z_5 \cap Z_4 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_6 \cup P_7 \supseteq P_3 \cup P_2 \neq \varnothing, \\
Z_5 \cap Z_3 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7 \supseteq P_4 \cup P_2 \neq \varnothing, \\
Z_5 \cap Z_2 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7 \supseteq P_4 \cup P_3 \neq \varnothing,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_4 \cap Z_3 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_2 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \supseteq P_2 \cup P_5 \neq \varnothing, \\
Z_4 \cap Z_2 &= (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \supseteq P_5 \cup P_3 \neq \varnothing, \\
Z_3 \cap Z_2 &= (P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \supseteq P_5 \cup P_4 \cup P_2 \cup P_1 \neq \varnothing, \\
Z_3 \cap Z_1 &= (P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \supseteq P_2 \cup P_4 \cup P_5 \neq \varnothing, \\
Z_2 \cap Z_1 &= (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) \cap \\
&\cap (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\
&= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \supseteq P_5 \cup P_4 \cup P_3 \cup P_1 \neq \varnothing,
\end{aligned}
$$

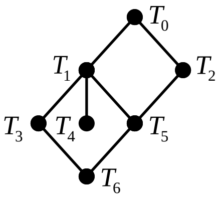
ე.ი. არც ერთი მათგანი მოცემულ შემთხვევაში არ წარმოადგენს $XI-$ ნახევარმესერს.

ნახევარმესერები $\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, რომელთა დიაგრამები ემთხვევა მეთერთმეტე დიაგრამას, თეორემა 2.0.12-ის თანახმად იქნებიან $XI-$ ნახევარმესერები მხოლოდ მაშინ, როცა $Z_i \cap Z_3 = \varnothing$ $(i = 4,5)$. როგორც

ზემოთ იყო ნაჩვენები D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად ყოველთვის სამართლიანია უტოლობები $Z_4 \cap Z_3 \neq \varnothing$ და $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. ამიტომაც $\left\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$, $\left\{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$, $\left\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$ სიმრავლეები არასდროს არ იქნებიან $XI-$ ნახევარმესერები.

ის ნახევარმესერები, რომელთა დიაგრამები ემთხვევა (იხ. ნახ.-2.2.1) 12-33 დიაგრამებიდან ერთ-ერთს, არასოდეს იქნებიან $XI-$ ნახევარმესერები. მართლაც, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ ნახევარმესერებს, რომელთა დიაგრამები ემთხვევიან (იხ. ნახ.-2.2.1) 33-ე დიაგრამას. დანარჩენ შემთხვევაში მტიცება იმისა, რომ ისინი არ არიან $XI-$ ნახევარმესერები, მოცემული მტკიცების ანალოგიური იქნება.

მართლაც, დავწეროთ მესამე დიაგრამით განსაზღვრული $D' = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$ ნახევარმესერის ფორმალური ტოლობები:



ნახ. 2.2.2.

$$\begin{aligned}
T_0 &= P_0' \cup P_1' \cup P_2' \cup P_3' \cup P_4' \cup P_5' \cup P_6',\\
T_1 &= P_0' \cup P_2' \cup P_3' \cup P_4' \cup P_5' \cup P_6',\\
T_2 &= P_0' \cup P_1' \cup P_3' \cup P_4' \cup P_5' \cup P_6',\\
T_3 &= P_0' \cup P_2' \cup P_4' \cup P_5' \cup P_6',\\
T_4 &= P_0' \cup P_2' \cup P_3' \cup P_5' \cup P_6',\\
T_5 &= P_0' \cup P_3' \cup P_4' \cup P_6',\\
T_6 &= P_0' \cup P_4',
\end{aligned}$$

სადაც $P_0', P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$ და P_6' არიან X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები. ამ შემთხვევაში ბაზისური წყაროებია P_1', P_2', P_3', P_4', ხოლო სისავსის წყაროებია P_0', P_5' და P_6'.

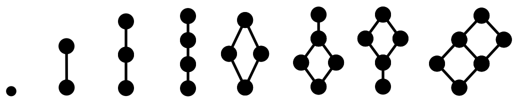
ზემოთ ხსენებული წინადადების შესამოწმებლად ყოველი ელემენტისათვის, აღებული სიმრავლიდან, ვიპოვოთ $\wedge(D', D_t')$ ელემენტები. D' ნახევარმესერის ფორმალური ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ, რომ D_t' სიმრავლეები D' ნახევარმესერში შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$D_t=\begin{cases} D',\ t\in P'_{0,} \\ \{T_2,T_0\},\ t\in P'_1, \\ \{T_4,T_3,T_1,T_0\},\ t\in P'_2, \\ \{T_5,T_4,T_2,T_1,T_0\},\ t\in P'_3, \\ \{T_6,T_5,T_3,T_2,T_1,T_0\},\ t\in P'_4, \\ \{T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\},\ t\in P'_5, \\ \{T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\},\ t\in P'_6, \end{cases} \qquad \wedge\left(D',D'_t\right)=\begin{cases} T_2,\ t\in P'_1, \\ T_6,\ t\in P'_4. \end{cases}$$

ასეთ შემთხვევაში $\wedge(D',D'_t)\notin D$ ნებისმიერი $t\in P'_0\cup P'_2\cup P'_3\cup P'_5\cup P'_6$. (ცხადია, ასეთი ერთი t ელემენტი მაინც არსებობს, რადგანაც $P'_2\cup P'_3\neq\varnothing$). ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში $XI-$ ნახევარმესერის განსაზღვრებაში მოცემულ პირობებს, გვექნება, რომ D' არ არის $XI-$ ნახევარმესერი.

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული ლემა 2.2.2-ის თანახმად $XI-$ ნახევარმესერთა დიაგრამებს ექნებათ მეოთხე ნახაზზე მოცემული დიაგრამებიდან ერთ-ერთის სახე.



7

ნახ. 2.2.3

თეორემა 1.2.1. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$.

ბინარული α მიმართება, აღებული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი, როცა მისი კვაზინორმალური წარმოდგენა ქვემოთ მოყვანილი პირობებიდან აკმაყოფილებს თუნდაც ერთ პირობას:

a) $\alpha=X\times T$,

რომელიღაც $T\in D$ ელემენტისათვის;

b) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$,

რომელიღაც $T,T'\in D$, $T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$;

c) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$,

რომელიღაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$ და $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

d) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right),$

რომელიდაც $T, T', Z \in D$, $Z_7 \subset T \subset T' \subset \breve{D}$, $Y_7^\alpha, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

e) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{T' \cup Z}^\alpha \times \left(T' \cup Z\right)\right)$

რომელიდაც

$$' \quad \in \quad ,$$

$$\subset \; ', \quad \subset \quad ,$$

$$' \quad \neq \varnothing, \qquad ' \neq \varnothing,$$

$$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\},$$

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T', \; Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z,$$

$$Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing, \; Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing;$$

f) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$

რომელიდაც

$$Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\},$$

$$Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq Z_6, \; Y_7^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4,$$

$$Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing, \; Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,$$

$$Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

g) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$

რომელიდაც

$$Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\},$$

$$Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq Z_6,$$

$$Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3,$$

$$Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1,$$

$$Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,$$

$$Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,$$

$$Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing.$$

) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$,

რომელიღაც

$$Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\},$$

$^{\alpha} \supseteq \quad , \quad ^{\alpha} \cup \ ^{\alpha} \supseteq \quad ,$

$^{\alpha} \cup \ ^{\alpha} \supseteq$

$^{\alpha} \cup \ ^{\alpha} \cup \ ^{\alpha} \supseteq \quad ,$

$^{\alpha} \cap \quad \neq \varnothing, \quad ^{\alpha} \cap \quad \neq \varnothing,$

$^{\alpha} \cap \quad \neq \varnothing.$

დამტკიცება: ლემა 2.2.2-დან გამომდინარეობს, რომ მეოთხე ნახაზზე მოცემული 1-8 დიაგრამები ამოწურავენ D ნახევარმესერების ყველა $XI-$ ქვე-ნახევარმესერთა დიაგრამებს. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენ-ტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც განსაზღვრულია მოცემული $XI-$ ნაევარმესერებით, შეიძლება ჰქონდეთ ზემოთ მოცემული სახეებიდან ერთ-ერთი. ახლა მოცემული თეორემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს შედეგებიდან 2.0.1, 2.0.2 და თეორემა 2.0.6-დან .

ახლა ვთქვათ $D \in \Sigma_4(X,8)$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

) $\quad = \{ \quad \}$, სადაც $\quad \in \quad$;

) $\quad = \{ \quad ' \}$, სადაც $\quad ' \in \quad$ და $\quad \subset \ '$;

) $\quad = \{ \quad ' \quad '' \}$, სადაც $\quad ' \quad '' \in \quad$ და $\quad \subset \ ' \subset \ ''$;

) $\quad = \left\{ \quad ' \ \breve{} \right\}$, სადაც $\quad ' \in \quad$ და $\quad \subset \quad \subset \ ' \subset \ \breve{}$;

) $\quad = \{ \quad ' \quad ' \cup \quad \}$, სადაც $\quad ' \quad \in \quad , \quad \subset \ ', \quad \subset \quad , \ ' \quad \neq \varnothing$, და $\quad ' \neq \varnothing$;

) $\quad = \left\{ \quad \breve{} \right\}$;

7) $Q_7 = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$;

) $\quad = \left\{ \quad \breve{} \right\}$.

ვთქვათ $\Sigma(Q_i)$ $(i=1,2,\ldots,8)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია Q_i ნახევარმესერის იზომორფული D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ქვენახევარმესერთა სიმრავლე. $D'\in\Sigma(Q_i)$ და $I(D')$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $B_X(D')$ ნახევარჯგუფების ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე.

დავუშვათ, რომ

$$I^*(Q_i)=\bigcup_{D'\in\Sigma(Q_i)} I(D')$$

შენიშვნა.

D' გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D')$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე ხშირად აღინიშნება $E_X^{(r)}(D')$ სიმბოლოთი (იხ. [1]).

ლემა 2.2.3. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

$) \ |\ (\ \ )| = \ ;$

$) \ |\ (\ \ )| = (\ |\ '\ |-\ )\cdot\ |\ \ '|;$

$) \ |\ (\ \ )| = (\ |\ '\ |-\ )\cdot(\ |\ ''\ '|-\ |\ ''\ '|)\cdot\ |\ \ ''|;$

$) \ |\ (\ \ )| = (\ |\ \ |-\ )\cdot(\ |\ '\ |-\ |\ '\ |)\cdot(\ |\ \ '|-\ |\ \ '|)\cdot\ |\ \ |;$

$) \ |\ (\ \ )| = (\ |\ '\ |-\ )\cdot(\ |\ \ '|-\ )\cdot\ |\ (\ '\cup\ )|;$

$) \ |\ (\ \ )| = (\ |\ \ |-\ )\cdot(\ |\ \ |-\ )\cdot(\ |\ \ |-\ |\ \ |)\cdot\ |\ \ |;$

$) \ |\ (\ \ )| = (\ |\ \ |-\ )\cdot\ |(\ \cap\ )\ |\cdot(\ |\ \ |-\ |\ \ |)\cdot(\ |\ \ |-\ |\ \ |)\cdot\ |\ \ |;$

h$) \ |\ (\ \ )| = (\ |\ \ |-\ )\cdot(\ |\ \ |-\ )\cdot(\ |\ \ |-\ |\ \ |)\cdot\ |\ \ |.$

დამტკიცება. მოცემული ლემის a), b), c) და d) წინადადებები უშუალოდ გამომდინარეობს შედეგი 2.0.3-დან, ხოლო e), f), g) და h) წინადადებები კი თეორემა 2.0.9 და შედეგებიდან 2.0.4, 2.0.5, 2.0.6 და 2.0.7.

2.3 $B_X(D)$ ნახევარჯგუფში იდემპოტენტების დათვლის ფორმულები

$\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმბოლოთი აღინიშნება D გაერთიანებათა სრულ $XI-$ ქვენა-ხევარმესერთა სიმრავლე.

ახლა ვთქვათ $D, D' \in \Sigma'(X,D)$ და $\vartheta_{XI} \subseteq \Sigma'_{XI}(X,D) \times \Sigma'_{XI}(X,D)$. იტყვიან, რომ $D\vartheta_{XI}D'$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს სრული φ იზომორფიზმი D ნახევარმესერსა და D' სიმრავლეს შორის. ადვილად მოწმდება, რომ ბინარული ϑ_{XI} მიმართება არის ექვივალენტობის მიმართება $\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმრავლეზე.

ვთქვათ $Q_i\vartheta_{Xi}$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმრავლეზე ϑ_{XI} ექვივალენტობის ის $\vartheta_{XI}-$ კლასი, რომლის ყველა ელემენტი იზომორფულია Q_i გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერისა $(i=1,2,\ldots,8)$.

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

ლემა 2.3.1. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_{4,} Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X,8)$.

თუ   სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left| \ ^*(\quad) \right| = \quad .$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$Q_1\theta_{XI} = \left\{\{Z_7\}, \{Z_6\}, \{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\breve{D}\}\right\}.$$

დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} &D'_1 = \{Z_7\},\ D'_2 = \{Z_6\},\\ &D'_3 = \{Z_5\},\ D'_4 = \{Z_4\},\\ &D'_5 = \{Z_3\},\ D'_6 = \{Z_2\},\\ &D'_7 = \{Z_1\},\ D'_8 = \{\breve{D}\}. \end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში თეორემა 2.0.8-ის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \left|I^*(Q_1)\right| = &\left|I(D'_1)\right| + \left|I(D'_2)\right| +\\ &+\left|I(D'_3)\right| + \left|I(D'_4)\right| +\\ &+\left|I(D'_5)\right| + \left|I(D'_6)\right| +\\ &+\left|I(D'_7)\right| + \left|I(D'_8)\right|. \end{aligned}$$

ამ ტოლობიდან ლემა 2.2.3 - ის) წინადადებიის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left|I^*\left(Q_1\right)\right|=1+1+1+1+1+1+1+1=8.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.2. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$. თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left| \ {}^*\left(\quad \right)\right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_2\right)\right|=&\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_6\right|}+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_4\right|}+\\&+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_7\right|}+2^{\left|Z_3\setminus Z_6\right|}-2\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_3\right|}+\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_7\right|}+2^{\left|Z_1\setminus Z_6\right|}+2^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}+2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-4\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\\&+\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_7\right|}+2^{\left|\breve{D}\setminus Z_6\right|}+2^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}+2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}+2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}+2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}+2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-7\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned}Q_2\theta_{XI}=&\left\{\left\{Z_7,Z_6\right\},\left\{Z_7,Z_4\right\},\left\{Z_7,Z_3\right\},\right.\\&\left\{Z_7,Z_1\right\},\left\{Z_7,\breve{D}\right\},\left\{Z_6,Z_3\right\},\\&\left\{Z_6,Z_1\right\},\left\{Z_6,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_1\right\},\\&\left\{Z_5,\breve{D}\right\},\left\{Z_4,Z_1\right\},\left\{Z_4,\breve{D}\right\},\\&\left.\left\{Z_3,\breve{D}\right\},\left\{Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_1,\breve{D}\right\}\right\}\end{aligned}$$

დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned}&D_1'=\left\{Z_7,Z_6\right\},D_2'=\left\{Z_7,Z_4\right\},D_3'=\\&\quad=\left\{Z_7,Z_3\right\},D_4'=\left\{Z_7,Z_1\right\},D_5'=\\&\quad=\left\{Z_7,\breve{D}\right\},D_6'=\left\{Z_6,Z_3\right\},\\&D_7'=\left\{Z_6,Z_1\right\},D_8'=\left\{Z_6,\breve{D}\right\},D_9'=\\&\quad=\left\{Z_5,Z_1\right\},D_{10}'=\left\{Z_5,\breve{D}\right\},D_{11}'=\\&\quad=\left\{Z_4,Z_1\right\},D_{12}'=\left\{Z_4,\breve{D}\right\},\\&D_{13}'=\left\{Z_3,\breve{D}\right\},D_{14}'=\left\{Z_2,\breve{D}\right\},\\&D_{15}'=\left\{Z_1,\breve{D}\right\}.\end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში თეორემა 2.0.8-ის თანახმად გვექნება, რომ

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_2\right)\right|=&\left|I\left(D_1'\right)\right|+\left|I\left(D_2'\right)\right|+\left|I\left(D_3'\right)\right|+\\&+\left|I\left(D_4'\right)\right|+\left|I\left(D_5'\right)\right|+\left|I\left(D_6'\right)\right|+\\&+\left|I\left(D_7'\right)\right|+\left|I\left(D_8'\right)\right|+\left|I\left(D_9'\right)\right|+\\&+\left|I\left(D_{10}'\right)\right|+\left|I\left(D_{11}'\right)\right|+\left|I\left(D_{12}'\right)\right|+\\&+\left|I\left(D_{13}'\right)\right|+\left|I\left(D_{14}'\right)\right|+\left|I\left(D_{15}'\right)\right|.\end{aligned}$$

ამ ტოლობიდან ლემა 2.2.3 - ის) წინადადებიდის გამოყენებით მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
\left|I^{*}\left(Q_{2}\right)\right| &= \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_6|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}=\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_6|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}+2^{|Z_3\setminus Z_6|}-2\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}+2^{|Z_1\setminus Z_6|}+2^{|Z_1\setminus Z_5|}+2^{|Z_1\setminus Z_4|}-4\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-7\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.3. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|\ {}^{*}\left(\quad\right)\right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$
\begin{aligned}
\left|I^{*}\left(Q_{3}\right)\right| &= \left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+\\
&+\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$
\begin{aligned}
Q_3Q_{XI} = \Big\{ &\left\{Z_7,Z_6,Z_3\right\},\left\{Z_7,Z_6,\breve{D}\right\},\\
&\left\{Z_7,Z_3,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_4,Z_1\right\},\\
&\left\{Z_7,Z_4,\breve{D}\right\},\ \left\{Z_7,Z_1,\breve{D}\right\},\\
&\left\{Z_7,Z_6,Z_1\right\},\left\{Z_6,Z_1,\breve{D}\right\},\\
&\left\{Z_6,Z_3,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\\
&\left\{Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}\Big\}.
\end{aligned}
$$

დავუშვათ, რომ

$$
\begin{aligned}
&D_1' = \{Z_7, Z_6, Z_3\}, D_2' = \{Z_7, Z_6, \breve{D}\},\\
&D_3' = \{Z_7, Z_3, \breve{D}\}, D_4' = \{Z_7, Z_4, Z_1\},\\
&D_5' = \{Z_7, Z_4, \breve{D}\}, D_6' = \{Z_7, Z_1, \breve{D}\},\\
&D_7' = \{Z_7, Z_6, Z_1\}, D_8' = \{Z_6, Z_1, \breve{D}\},\\
&D_9' = \{Z_6, Z_3, \breve{D}\}, D_{10}' = \{Z_5, Z_1, \breve{D}\},\\
&D_{11}' = \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}.
\end{aligned}
$$

ამ შემთხვევაში თეორემა 2.0.8-დან გამომდინარეობს, რომ

$$
\begin{aligned}
\left|I^*(Q_3)\right| = {} & \left|I(D_1')\right| + \left|I(D_2')\right| + \left|I(D_3')\right| + \\
& + \left|I(D_4')\right| + \left|I(D_5')\right| + \left|I(D_6')\right| + \\
& + \left|I(D_7')\right| + \left|I(D_8')\right| + \left|I(D_9')\right| + \\
& + \left|I(D_{10}')\right| + \left|I(D_{11}')\right|.
\end{aligned}
$$

ამ ტოლობიდან ლემა 2.2.3 - ის) წინადადების გამოყენებით მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
\left|I^*(Q_3)\right| = {} & \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|} - 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|} + \\
& + \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|} - 2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|} + \\
& + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|} - 2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|} + \\
& + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.4. ვთქვათ, $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_{4,} Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left| {}^*(\quad)\right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$
\begin{aligned}
\left|I^*(Q_4)\right| = {} & \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|} - 2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|} - 2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|} - 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$Q_4Q_{XI} = \left\{ \left\{ Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D} \right\}, \left\{ Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D} \right\}, \left\{ Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D} \right\} \right\}.$$

დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} D_1' &= \left\{ Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D} \right\}, \\ D_2' &= \left\{ Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D} \right\}, \\ D_3' &= \left\{ Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D} \right\} \end{aligned}.$$

ამ შემთხვევაში თეორემა 2.0.8-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left| I^*\left(Q_4\right) \right| = \left| I\left(D_1'\right) \right| + \left| I\left(D_2'\right) \right| + \left| I\left(D_3'\right) \right|.$$

ამ ტოლობიდან ლემა 2.2.3 - ის) წინადადების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \left| I^*\left(Q_4\right) \right| = {} & \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & + \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & + \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(4^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|} - 3^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|}\right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.5. ვთქვათ $D = \left\{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_{4,} Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D} \right\} \in \Sigma_4\left(X, 8\right)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left| {}^{*}\left(\quad \right) \right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned} \left| I^*\left(Q_5\right) \right| = {} & 2 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & + \left(2^{|Z_6 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ & + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}. \end{aligned}$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$Q_5Q_{XI} = \left\{ \left\{ Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\}, \left\{ Z_7, Z_6, Z_4, Z_1 \right\}, \left\{ Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D} \right\}, \left\{ Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\} \right\}.$$

დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} D_1' &= \left\{ Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\}, \\ D_2' &= \left\{ Z_7, Z_6, Z_4, Z_1 \right\}, \\ D_3' &= \left\{ Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D} \right\}, \\ D_4' &= \left\{ Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\} \end{aligned}.$$

ამ შემთხვევაში თეორემა 2.0.8-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|I^*\left(Q_5\right)\right| = \left|I\left(D_1'\right)\right| + \left|I\left(D_2'\right)\right| + \left|I\left(D_3'\right)\right| + \left|I\left(D_4'\right)\right|.$$

ამ ტოლობიდან ლემა 2.2.3 - ის   ) წინადადების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_5\right)\right| = 2\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|} &+ \\ +\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_1\right|} &+ \\ +\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}&.\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.6. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$.

თუ   სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|\ ^*(\quad)\right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \left(2^{\left|Z_6\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$Q_6 Q_{XI} = \left\{\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}.$$

დავუშვათ, რომ

$$D_1' = \left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \left|I\left(D_1'\right)\right|.$$

ამ ტოლობიდან ლემა 2.2.3 - ის   ) წინადადების გამოყენებით მივიღეთ:

$$\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \left(2^{\left|Z_6\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.7. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$.

თუ   სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|\ ^*(\quad)\right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*\left(Q_7\right)\right| = \left(2^{\left|Z_6\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|\left(Z_3\cap Z_1\right)\setminus Z_6\right|}\cdot\left(3^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$Q_7 Q_{XI} = \left\{ \left\{ Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\} \right\}.$$

დავუშვათ, რომ

$$D_1' = \left\{ Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\}.$$

ამ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ

$$\left| I^* \left(Q_7 \right) \right| = \left| I \left(D_1' \right) \right|.$$

ამ ტოლობიდან ლემა 2.2.3 - ის $g)$ წინადადების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left| I^* \left(Q_7 \right) \right| = \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot 2^{|(Z_3 \cap Z_1) \setminus Z_6|} \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_1|} \right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_3|} \right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.8. ვთქვათ, $D = \left\{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_{4,} Z_3, Z_{2,} Z_1, \breve{D} \right\} \in \Sigma_4 \left(X, 8 \right)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left| \ ^* \left(\quad \right) \right|$ რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$\left| I^* \left(Q_8 \right) \right| = \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_1|} \right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$Q_8 Q_{XI} = \left\{ \left\{ Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\} \right\}.$$

დავუშვათ, რომ

$$D_1' = \left\{ Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D} \right\}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\left| I^* \left(Q_8 \right) \right| = \left| I \left(D_1' \right) \right|.$$

ამ ტოლობიდან ლემა 2.2.3 - ის) წინადადების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left| I^* \left(Q_8 \right) \right| = \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_1|} \right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ, $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_{4,}Z_3,Z_{2,}Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, ხოლო არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტების სიმრავლე, მაშინ

$$\begin{aligned}|I_D|=&|I^*(Q_1)|+|I^*(Q_2)|+|I^*(Q_3)|+\\&+|I^*(Q_4)|+|I^*(Q_5)|+|I^*(Q_6)|+\\&+|I^*(Q_7)|+|I^*(Q_8)|\end{aligned}.$$

დამტკიცება. მოცემული თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 2.0.9-დან და თეორემა 2.2.1-დან.

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფი, რომლის ერთეულია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ε ბინარული მიმართება, აღვნიშნოთ $G_X(D,\varepsilon)$ სიმბოლოთი და აღვწეროთ $D\in\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების მაქსიმალური ქვეჯგუფები.

თეორემა 2.3.2. თუ $D\in\Sigma_4(X,8)$, მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართებისათვის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის $G_X(D,\varepsilon)$ ქვეჯგუფი წარმოადგენს ჯგუფს, რომლის რიგი არაუმეტეს 2-ის ტოლია.

დამტკიცება: ვთქვათ, ε არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი იდემპოტენტი. თუ $V(D,\varepsilon)$ ნახევარმესერის ყველა სრულ ავტომორფიზმთა ჯგუფს აღვნიშნავთ Φ სიმბოლოთი, მაშინ თეორემა 2.0.10.-ის ძალით მივიღებთ, რომ $G_X(D,\varepsilon)$ და Φ ჯგუფები ერთმანეთის ანტიიზომორფულია.

მოცემული თეორემის დამტკიცებისათვის ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართებისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. დავუშვათ, რომ მოცემული ε იდემპოტენტური მიმართებისათვის (ε) ისეთი ნახევარმესერია, რომლის დიაგრამაც ჯაჭვია ან ბადეა (ე.ი., აკმაყოფილებს თეორემის 2.2.1-ის),),), d) ან h) პირობებს). რადგან სასრულო ჯაჭვის და სხვადასხვა განზომილებიანი ბადის სრული ავტომორფიზმი არის მხოლოდ იგივური ასახვა, ამიტომ $|\Phi|=1$, ე.ი. მოცემულ ნახევარმესერთა სრული ავტომრფიზმების ჯგუფი ერთელოვანი ჯგუფია. გამომდინარე აქედან მათი ანტიიზომორ-

ფული $G_X(D,\varepsilon)$ მაქსიმალური ჯგუფი, თეორემა 2.0.10-ის თანახმად, იქნება ერთეულოვანი ჯგუფი, ე.ი. $G_X(D,\varepsilon)=\{\varepsilon\}$ და ამიტომაც $\left|G_X(D,\varepsilon)\right|=\left|\{\varepsilon\}\right|=1$.

2. თუ იდემპოტენტური ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემის 2.2.1-ის) ან) ან g) პირობებს, მაშინ $V(D,\varepsilon)$ ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რიცხვი 2-ის ტოლია. თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 2.0.10-ს, მივიღებთ, რომ $|G_X(D,\varepsilon)|=2.$

ახლა მოცემული თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.2.1-ის სამართლიანობიდან.

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2.3.1. ვთქვათ, $=\{\qquad\}=\breve{}$ და

$$P_1=\{1\},\ P_2=\{2\},\ P_3=\{3\},$$
$$P_4=\{4\},\ P_5=\{5\},\ P_0=P_6=P_7=\varnothing\ .$$

მაშინ

$$\breve{D}=\{1,2,3,4,5\},$$

$$Z_1=\{2,3,4,5\},$$

$$Z_2=\{1,3,4,5\},$$

$$Z_3=\{1,2,4,5\},$$

$$Z_4=\{2,3,5\},$$

$$Z_5=\{2,3,4\},$$

$$Z_6=\{2,4,5\},$$

$$Z_7=\{2,5\}$$

და $D=\{\{2,5\},\{2,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$.

ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$|I^*(Q_1)|=8,\ \left|I^*(Q_2)\right|=47,$$

$$\left|I^*(Q_3)\right|=29,\ \left|I^*(Q_4)\right|=3,$$

$$\left|I^*(Q_5)\right| = 9\,,\ \left|I^*(Q_6)\right| = 1\,,$$

$$\left|I^*(Q_7)\right| = 1\,,\ \left|I^*(Q_8)\right| = 1\,,$$

ე.ი., $|I_D| = 99$.

მაგალითი 2.3.2. ვთქვათ $=\{\qquad\} = \smile$ და

$$\begin{array}{l} P_0 = \{8\},\ P_1 = \{1\}, \\ P_2 = \{2\},\ P_3 = \{3\}, \\ P_4 = \{4\},\ P_5 = \{5\},\ \ . \\ P_6 = \{6\},\ P_7 = \{7\} \end{array}$$

მაშინ

$$\smile = \{\qquad\}\,,$$

$$= \{\qquad\}$$

$$= \{\qquad\}\,,$$

$$= \{\qquad\}\,,$$

$$= \{\qquad\}\,,$$

$$= \{\qquad\}\,,$$

$$= \{\qquad\}\,,$$

$$= \{\qquad\}$$

და

$$\begin{aligned} D = \{&\{2,5,8\},\ \{2,4,5,7,8\},\ \{2,3,4,6,7,8\}, \\ &\{2,3,5,6,7,8\},\ \{1,2,4,5,6,7,8\}, \\ &\{1,3,4,5,6,7,8\},\ \{2,3,4,5,6,7,8\},\ \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}. \end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$|I^*(Q_1)| = 8\,,\ \left|I^*(Q_2)\right| = 175\,,\ \left|I^*(Q_3)\right| = 241\,,$$

$$\left|I^*(Q_4)\right| = 37\,,\ \left|I^*(Q_5)\right| = 17\,,\ \left|I^*(Q_6)\right| = 3\,,$$

$$\left|I^*(Q_7)\right| = 6\,,\ \left|I^*(Q_8)\right| = 1\,,\ |I_D| = 488$$

თავი III

$\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები

მოცემულ თავში სრულად არის გადმოცემული $\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები. იმ შემთხვევაში, როცა X სასრულო სიმრავლეა, მოცემულია შესაბამისი ნახევარჯგუფების რეგულარულ ელე-მენტთა რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულები.

ამასთანავე ნაშრომში ვამტკიცებთ, რომ $\Sigma_4(X,8)$ კლასის D გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ სრული ნახევარჯგუფების ყველა რეგულარული ელემენტების R_D სიმრავლე წამოადგენს ამ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფს.

ჩამოვაყალიბოთ რამდენიმე განმარტება, თეორემა და შედეგი.

განმარტება 3.0.1. D' და D'' გაერთიანებათა სრულ X ნახევარმესერებს შორის ურთიერთცალსახა φ ასახვას ვუწოდებთ სრულ იზომორფიზმს, თუ D' ნახევარმესერის არაცარიელ D_1 ქვესიმრავლისათვის სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\varphi(\cup D_1) = \bigcup_{T' \in D_1} \varphi(T')$$

(იხ. [1], **განმარტება 6.3.2.**).

განმარტება 3.0.2. ვთქვათ α ბინარული მიმართება სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტია. იტყვიან, რომ სრული φ იზომორფიზმი გაერთიანებათა სრულ Q და D' ნახევარმესერებს შორის არის სრული $\alpha-$ იზომორფიზმი, თუ

a) $=$ α ;

b) $\varphi(\varnothing)=\varnothing$ $\varnothing\in$ α -თვის და φ $\alpha=$ ნებისმიერი $\in$ α .

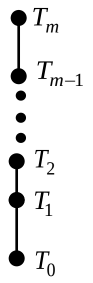
(იხ. [1], **განმარტება 6.3.3.**)

განმარტება 3.0.3. ვთქვათ, $\sum'_{XI}(D)$ აღნიშნავს D გაერთიანების სრული იმ $X-$ ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერთა სიმრავლეს, რომლის ყველა

ელემენტი შეიცავს ცარიელ სიმრავლეს, თუ $\varnothing \in D$ ან აღნიშნავს D გაერთიანების სრული $X-$ ნახევარმესერის ყველა $XI-$ქვენახევარმესერთა სიმრავლეს, თუ $\varnothing \notin D$.

(იხ. [1], **განმარტება 6.3.5.**)

თეორემა 3.0.1. ვთქვათ $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m\geq 1)$ არის D გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_m$. მაშინ $B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha=\bigcup_{i=0}^{m}\left(Y_i^\alpha \times T_i\right)$ და სრულდება პირობა $Q=V(D,\ \alpha)$, არის მოცემული $B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც $D'=\{\varphi(T_0),\varphi(T_1),...,\varphi(T_m)\}$ ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup ... \cup Y_p^\alpha \supseteq \varphi(T_p)$ და $Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \varnothing$ ნებისმიერი $p=0,1,...,m-1$ და $q=1,2,...,m$ -თვის.



ნახ. 3.0.1

(იხ. [1], თეორემა 13.1.1).

თეორემა 3.0.2. ვთქვათ $Q=\{T_0,T_1,...,T_j,...,T_m\}$ $(m\geq 3)$ არის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერი და j ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, რომ $0\leq j\leq m-3$ და

$T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset ... \subset T_m$, $T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset ... \subset T_m$, $T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \varnothing, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \varnothing, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$.

მაშინ $B_X(Q)$ ნეხევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha=\bigcup_{i=0}^{m}\left(Y_i^\alpha \times T_i\right)$ და სრულდება პირობა $Q=V(D,\ \alpha)$, არის

$B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც $D'=\{\varphi(T_0),...,\varphi(T_m)\}$ ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

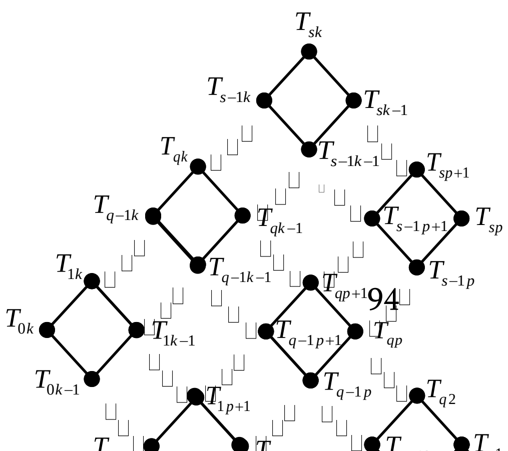
$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup ... \cup Y_j^\alpha \supseteq \varphi(T_{j+1}) \cap \varphi(T_{j+2}),\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup ... \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha \supseteq \varphi(T_{j+2}),$$
$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup ... \cup Y_p^\alpha \supseteq \varphi(T_p),\ Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \varnothing$$

ნებისმიერი $p=0,1,2,...,m-1$, $q=1,2,...,m$-თვის, $(p \neq j+2,\ q \neq j+3)$

(იხ. [1] თეორემა 13.3.1).

თეორემა 3.0.3. ვთქვათ Q იყოს ნახევარმესერი, რომლის დიაგრამაც მოცემულია 3.0.2 ნახაზზე მაშინ $B_X(Q)$- დან აღებული ბინარული α მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე: $\alpha = \bigcup\limits_{T_{ij}} (Y_{ij} \times Tij)$ და $Q = V(D,\alpha)$, წარმოადგენს $B_X(Q)$-ს რეგულარულ ელემენტს, თუ φ ასახვა Q ნახევარმესერიდან D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ნახევარმესერზე არის ისეთი $\alpha-$იზომორფიზმი, რომ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\begin{aligned}
&Y_{00}^\alpha \supseteq \varphi(T_{0k}) \cap \varphi(T_{q0}),\ Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \supseteq \varphi(T_{01}),\\
&Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \cup Y_{02}^\alpha \supseteq \varphi(T_{01}),...,Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \cup ... \cup Y_{0k}^\alpha \supseteq \varphi(T_{0k}),\\
&Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \supseteq \varphi(T_{10}),\ Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \cup Y_{20}^\alpha \supseteq \varphi(T_{20}),...,\\
&Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \cup ... \cup Y_{q0}^\alpha \supseteq \varphi(T_{q0}),\ Y_0^\alpha \cup Y_{q+1p}^\alpha \supseteq \varphi(T_{q+1p}),\\
&Y_0^\alpha \cup Y_{q+1p}^\alpha \cup Y_{q+2p}^\alpha \supseteq \varphi(T_{q+2p}),...,Y_0^\alpha \cup Y_{q+1p}^\alpha \cup Y_{q+2p}^\alpha \cup ... \cup Y_{sp}^\alpha \supseteq \varphi(T_{sp}),\\
&Y_{01}^\alpha \cap \varphi(T_{01}) \neq \varnothing,\ Y_{02}^\alpha \cap \varphi(T_{02}) \neq \varnothing,...,Y_{0k}^\alpha \cap \varphi(T_{0k}) \neq \varnothing,\ Y_{10}^\alpha \cap \varphi(T_{10}) \neq \varnothing,\\
&Y_{20}^\alpha \cap \varphi(T_{20}) \neq \varnothing,...,Y_{q0}^\alpha \cap \varphi(T_{q0}) \neq \varnothing, Y_{q+1p}^\alpha \cap \varphi(T_{q+1p}) \neq \varnothing,\\
&Y_{q+2p}^\alpha \cap \varphi(T_{q+2p}) \neq \varnothing,...,Y_{sp}^\alpha \cap \varphi(T_{sp}) \neq \varnothing.
\end{aligned}$$



ყოველი $T_{ij} \in Q^{\wedge}$

(იხ. [1] თეორემა 13.9.1).

თეორემა 3.0.4. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ $(m \geq 1)$ არის გაერთიანებათა ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_m$. თუ $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ და $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, ..., \bar{T}_m\}$ $XI-$ ნახევარმესერები არიან იზომორფულები და $\left|\Omega(Q)\right| = m_0$, (ix. [1] განმარტება 6.3.4) მაშინ

$$\left|R(D')\right| = m_0 \cdot \left(2^{\left|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_0\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1\right|} - 2^{\left|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1\right|}\right) ... \left((m+1)^{\left|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}\right|} - m^{\left|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}\right|}\right) \cdot m^{\left|X \setminus \bar{T}_m\right|}.$$

(იხ. [1] თეორემა 13.1.2).

თეორემა 3.0.5. ვთქვათ R_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $R(D') \cap R(D'') = \varnothing$ ნებისმიერი $D', D'' \in \Sigma_{XI}(D)$ და $D' \neq D''$;

b) $R_D = \bigcup_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} R(D')$;

c) თუ X არის სასრული სიმრავლე, მაშინ $\left|R_D\right| = \sum_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} \left|R(D')\right|$

(იხ. [1], თეორემა 6.3.6).

თეორემა 3.0.6. ვთქვათ $D_j = \{T_1, T_2, ..., T_j\}$, $D_j = \{T_1, T_2, ..., T_j\}$, X და Y სამი ისეთი სასრულო სიმრავლეა, რომ $\varnothing \neq Y \subseteq X$; f არის ისეთი ასახვა $X \setminus Y$ სიმრავლიდან

D_j – ში, რომ ნებისმიერი $y \in Y$ – თვის $f(y) = Tj$. მაშინ X სიმრავლიდან D_j – ში ყველა ასეთ ასახვათა s რაოდენობა ტოლია

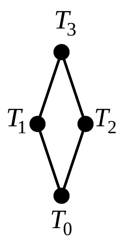
$$s = j^{|X \setminus Y|} \cdot \left(j^{|Y|} - (j-1)^{|Y|} \right)$$

(იხ. [1], თეორემა **1.18.2**.).

თეორემა 3.0.7. D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების R_D სიმრავლე იქნება $B_X(D)$-ს ქვენახევარჯგუფი მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული ნახევარჯგუფის ნებისმიერი რეგულარული α და β ელემენტებისათვის $V(D, \alpha \circ \beta)$ სიმრავლე ყოველთვის არის $V(D, \beta)$ ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერი.

(იხ. [1], თეორემა **14.201**.).

შედეგი 3.0.1. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ არის ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი,



ნახ. 3.0.3

რომ $\begin{matrix} T_0 \subset T_1 \subset T_3, \ T_0 \subset T_2 \subset T_3, \\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing, \ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing, \ T_1 \cup T_2 = T_3. \end{matrix}$ თუ $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ და $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3\}$ XI – ნახევარმესერები არიან α – იზომორფული და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულება:

$$\left| R(D') \right| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{\left|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2\right|} - 1 \right) \cdot \left(2^{\left|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1\right|} - 1 \right) \cdot 4^{\left|X \setminus \bar{T}_3\right|}.$$

(იხ. [1], შედეგი **13.3.4.)**

3.1. $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების აღწერა

მოცემულ პარაგრაფში სრულად არის გადმოცემული $\Sigma_4(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები.

განმარტება 3.1.1. α ელემენტს, აღებულს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფიდან, ეწოდება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, თუ $B_X(D)-$ში არსებობს ისეთი β ელემენტი, რომ

$$\alpha\circ\beta\circ\alpha=\alpha.$$

თეორემა 3.1.1. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$,

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\bigcup_{\in(\quad\alpha)}\left(\quad{}^{\alpha}\times\quad\right)$$

იქნება მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს სრული φ $\alpha-$იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერიდან D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

a) $\alpha=X\times T,$

რომელიღაც $T\in D$ ელემენტისათვის;

b) $\alpha=\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\alpha}\times T'\right),$

რომელიღაც $T,T'\in D$, $T\subset T'$,

$\boldsymbol{Y}_T^{\alpha},\boldsymbol{Y}_{T'}^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$,

$Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$,

$Y_{T'}^{\alpha}\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

ელემენტებისათვის

c) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$,

რომელიღაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$,

$$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin\{\varnothing\},$$

$$Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T),$$

$$Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T'),$$

$$Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing,$$

$Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$; ელემენტებისათვის

d) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$,

რომელიღაც

$$T,T',Z\in D,$$

$$Z_7\subset T\subset T'\subset\breve{D},$$

$$Y_7^\alpha, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\},$$

$$Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7),$$

$$Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T),$$

$$Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T'),$$

$$Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing,$$

$$Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing,$$

$Y_0^\alpha\cap\varphi\left(\breve{D}\right)\neq\varnothing$; ელემენტებისათვის

e) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{T'\cup Z}^\alpha\times\left(T'\cup Z\right)\right)$

რომელიღაც $\quad ' \quad \in \quad ,$

$$\subset\ ', \quad \subset \quad ,$$

$$' \quad \neq\varnothing, \qquad '\neq\varnothing,$$

$$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha\notin\{\varnothing\},$$

$$Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T'),$$

$$Y_T^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \supseteq \varphi(Z),$$

$$Y_{T'}^{\alpha} \cap \varphi(T') \neq \varnothing,$$

$Y_Z^{\alpha} \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$; ელემენტებისათვის

f) $\alpha = \left(Y_7^{\alpha} \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^{\alpha} \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^{\alpha} \times Z_4\right) \cup \left(Y_1^{\alpha} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right)$

რომელიღაც $Y_7^{\alpha}, Y_6^{\alpha}, Y_4^{\alpha}, Y_0^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$,

$$Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_6),$$

$$Y_7^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_4),$$

$$Y_6^{\alpha} \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing,$$

$$Y_4^{\alpha} \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing,$$

$Y_0^{\alpha} \cap \varphi\left(\breve{D}\right) \neq \varnothing$. ელემენტებისათვის

g) $\alpha = \left(Y_7^{\alpha} \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^{\alpha} \times Z_6\right) \cup \left(Y_3^{\alpha} \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^{\alpha} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right)$

რომელიღაც $Y_7^{\alpha}, Y_6^{\alpha}, Y_3^{\alpha}, Y_1^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$,

$$Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_6),$$

$$Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_3),$$

$$Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_1^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_1),$$

$$Y_6^{\alpha} \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing,$$

$$Y_3^{\alpha} \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing,$$

$Y_1^{\alpha} \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$. ელემენტებისათვის

) $\alpha = \left(Y_7^{\alpha} \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^{\alpha} \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^{\alpha} \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^{\alpha} \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^{\alpha} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right)$,

რომელიღაც $Y_7^{\alpha}, Y_6^{\alpha}, Y_4^{\alpha}, Y_3^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$,

$${}^{\alpha} \supseteq \varphi(\quad),$$

$${}^{\alpha} \cup \quad {}^{\alpha} \supseteq \varphi(\quad),$$

$${}^{\alpha} \cup \quad {}^{\alpha} \supseteq \varphi(\quad),$$

$^{\alpha} \cup \ ^{\alpha} \cup \ ^{\alpha} \supseteq \varphi(\quad)$,

$^{\alpha} \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$,

$^{\alpha} \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$,

$^{\alpha} \cap \varphi(\quad) \neq \varnothing$. ელემენტებისათვის

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში ლემა 3.2.1-დან გამომდინარეობს, რომ 2.2.1 ნახაზზე მოცემული 1-8 დიაგრამები ამოწურავენ D ნახევარმესერების ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერთა დიაგრამებს. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენ-ტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც განსაზღვრულია მოცემული $XI-$ ნაევარმესერებით, შეიძლება ჰქონდეთ ზემოთ მოცემული სახეებიდან ერთ-ერთი. ახლა მოცემული თეორემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს 3.0.1, 3.0.2 და 3.0.3 თეორემებიდან.

ახლა ვთქვათ $D \in \Sigma_4(X,8)$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

) $=\{ \ \}$, სადაც $\in$;

) $=\{ \quad ' \}$, სადაც $' \in$ და $\subset \ '$;

) $=\{ \quad ' \quad '' \}$, სადაც $' \quad '' \in$ და $\subset \ ' \subset \ ''$;

) $=\{ \quad ' \ \breve{} \}$, სადაც $' \in$ და $\subset \ \subset \ ' \subset \ \breve{}$;

) $=\{ \quad ' \quad ' \cup \ \}$, სადაც $' \ \in \ , \ \subset \ ', \ \subset \ , \ ' \ \neq \varnothing$,და $' \neq \varnothing$;

) $=\{ \quad \breve{} \}$;

7) $Q_7 = \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$;

) $=\{ \quad \breve{} \}$.

ვთქვათ $\Sigma(Q_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია Q_i ნახევარმესერის იზომორფული D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერთა სიმრავლე. ახლა, ვთქვათ $D' \in \Sigma(Q_i)$ და $R(D')$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $B_X(D')$ ნახევარჯგუ-ფების ყველა ისეთი α რეგულარული ელემენტების სიმრავლე, რომელთათვისაც $V(D,\alpha)$ და Q_i ნახევარმესერები ერთმანეთის $\alpha-$იზომორფულია და $V(D,\alpha) = Q_i$.

3.2. $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების დათვლის ფორმულები

$\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერების სიმრავლე.

შემდეგ ვთქვათ,

$$D, D' \in \Sigma'(X,D)$$

და

$$\vartheta_{XI} \subseteq \Sigma'_{XI}(X,D) \times \Sigma'_{XI}(X,D).$$

იგულისხმება, რომ $D\vartheta_{XI}D'$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა D და D' ნახევარმესერებს შორის არსებობს რაღაც φ სრული იზომორფიზმი. ადვილად შემოწმდება, რომ ბინარული ϑ_{XI} მიმართება არის ექვივალენტობის მიმართება $\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმრავლეზე.

$Q_i\vartheta_{XI}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $\Sigma'_{XI}(X,D)$ სიმრავლეზე $\vartheta_{XI}-$ექვივალენტობის ის კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი იზომორფულია Q_i $X-$ ნახევარმესერისა და 3.1.3 განმარტების თანახმად

$$R^*(Q_i) = \bigcup_{D' \in Q_i\vartheta_{XI}} R(D').$$

ლემა 3.2.1 თუ $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

) $\left| \quad (\quad) \right| = \quad ;$

) $\left| \quad (\quad) \right| = \quad \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad ;$

) $\left| \quad (\quad) \right| = \quad \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad ;$

) $\left| \quad (\quad) \right| = \quad \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad ;$

) $\left| \quad (\quad) \right| = \quad \cdot \quad \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad ;$

) $\left| \quad (\quad) \right| = \quad \cdot \quad \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad ;$

) $\left| \quad (\quad) \right| = \quad \cdot \quad \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad ;$

) $\left| \quad (\quad) \right| = \quad \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \left(\quad - \quad \right) \cdot \quad .$

დამტკიცება. მოცემული ლემის a), b), c) და d) წინადადებები უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 3.0.4-დან, ხოლო e), f) g) და h) წინადადებები კი 3.0.1, 2.0.5, 2.0.6, და 2.0.7 შედეგებიდან.

1) **ლემა 3.2.2.** ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left| \ ^{*}(\ ) \right| = \ .$$

დამტკიცება. ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$Q_1\theta_{XI}=\left\{\{Z_7\},\{Z_6\},\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\left\{\breve{D}\right\}\right\}$$

დავუშვათ, რომ

$$\begin{array}{l} D_1'=\{Z_7\},\ D_2'=\{Z_6\},\ D_3'=\{Z_5\},\\ D_4'=\{Z_4\},\ D_5'=\{Z_3\},\ D_6'=\{Z_2\},\\ D_7'=\{Z_1\},\ D_8'=\left\{\breve{D}\right\} \end{array}.$$

ამ შემთხვევაში თეორემა 3.0.5-დან მივიღებთ:

$$\left|R^*(Q_1)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|+\left|R(D_5')\right|+\left|R(D_6')\right|+\left|R(D_7')\right|+\left|R(D_8')\right|$$

ამ ტოლობიდან ლემა 3.2.1 - ის) წინადადების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left|R^*(Q_1)\right|=1+1+1+1+1+1+1+1=8$$

ლემა დამტკიცებულია.

2) გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{aligned} Q_2\theta_{XI}=\Big\{&\left\{Z_7,\breve{D}\right\},\{Z_5,Z_1\},\left\{Z_2,\breve{D}\right\},\\ &\left\{Z_1,\breve{D}\right\},\{Z_7,Z_6\},\{Z_7,Z_4\},\\ &\{Z_7,Z_3\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_6,Z_3\},\\ &\{Z_6,Z_1\},\left\{Z_6,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,\breve{D}\right\},\\ &\{Z_4,Z_1\},\left\{Z_4,\breve{D}\right\},\left\{Z_3,\breve{D}\right\}\Big\}. \end{aligned}$$

ახლა თუ

$$D'_1=\{Z_7,\breve{D}\},\ D'_2=\{Z_5,\breve{D}\},$$
$$D'_3=\{Z_2,\breve{D}\},\ D'_4=\{Z_1,\breve{D}\},$$
$$D'_5=\{Z_7,Z_6\},D'_6=\{Z_7,Z_4\},$$
$$D'_7=\{Z_7,Z_3\},\ D'_8=\{Z_7,Z_1\},$$
$$D'_9=\{Z_6,Z_3\},\ D'_{10}=\{Z_6,Z_1\},$$
$$D'_{11}=\{Z_6,\breve{D}\},\ D'_{12}=\{Z_5,Z_1\},$$
$$D'_{13}=\{Z_4,Z_1\},\ D'_{14}=\{Z_4,\breve{D}\},\ D'_{15}=\{Z_3,\breve{D}\}.$$

მაშინ თეორემა 3.0.5-დან მივიღებთ:

$$\begin{aligned}R^*(Q_2)=\,&R(D'_1)\cup R(D'_2)\cup R(D'_3)\cup\\&\cup R(D'_4)\cup R(D'_5)\cup R(D'_6)\cup\\&\cup R(D'_7)\cup R(D'_8)\cup R(D'_9)\cup\\&\cup R(D'_{10})\cup R(D'_{11})\cup R(D'_{12})\cup\\&\cup R(D'_{13})\cup R(D'_{14})\cup R(D'_{15})\end{aligned}\qquad ...(3.1.1)$$

ლემა. 3.2.3. ვთქვათ $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. მაშინ

$$|R^*(Q_2)|=|R(D'_1)|+|R(D'_2)|+|R(D'_3)|-|R(D'_4)|.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $D'=\{Z,Z'\}\in Q_2\theta_{XI}$, მაშინ $Z,Z'\in D$ და $Z\subset Z'$. თუ $\alpha\in R(D')$, მაშინ α ბინარულ მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$ სახე, სადაც $T,T'\in D,\ \ T\subset T',\ \ Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და თეორემა 3.1.1-ის b) წინადადების თანახმად აკმაყოფილებს პირობას: $Y_T^\alpha\supseteq Z$ და $Y_{T'}^\alpha\cap Z'\neq\varnothing$. რადგან Z_7, Z_5 და Z_2 არიან D ნახევარმესერის მინიმალური ელემენტები, ამიტომ $Z\supseteq Z_7$ ან $Z\supseteq Z_5$ ან $Z\supseteq Z_2$.

მეორეს მხრივ, $\breve{D}$ არის D ნახევარმესერის უდიდესი ელემენტი, ამიტომ $Z'\subseteq\breve{D}$. ამგვარად ჩვენს შემთხვევაში შემდეგი სამი პირობიდან სრულდება მხოლოდ ერთი:

$$Y_T^\alpha\supseteq Z_7 \text{ და } Y_{T'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,$$

ან

$$Y_T^\alpha\supseteq Z_5 \text{ და } Y_{T'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,$$

ან

$$Y_T^\alpha\supseteq Z_2 \text{ და } \mathrm{Y}_{\mathrm{T}'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing.$$

ე.ი. $\alpha \in R(D_1')$ ან $\alpha \in R(D_2')$ ან $\alpha \in R(D_3')$. აქედან (3.2.1) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$R^*(Q_2) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \qquad ...(3.2.2)$$

ახლა ვთქვათ, რომ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$, მაშინ

$$\begin{aligned} &Y_T^{\alpha} \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\ &Y_T^{\alpha} \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing. \end{aligned} \qquad ...(3.2.3)$$

ბოლო პირობებიდან მივიღებთ, რომ

$$Y_T^{\alpha} \supseteq Z_7 \cup Z_5 = Z_1,\ \breve{D} \cap Y_{T'}^{\alpha} \neq \varnothing$$

ე.ი.

$$\alpha \in R(D_4').$$

ამგვარად, სამართლიანია შემდეგი ჩართვა

$$R(D_1') \cap R(D_2') \subseteq R(D_4').$$

ახლა, თუ დავუშვებთ, რომ $\alpha \in R(D_4')$, მაშინ გვექნება

$$Y_T^{\alpha} \supseteq Z_1$$

და

$$Y_{T'}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

ამ ორი ჩართვიდან გამომდინარეობს მესამე ჩართვების სამართლიანობაც, ე.ი. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$, ამიტომაც

$$R(D_4') \subseteq R(D_1') \cap R(D_2').$$

მივიღეთ, რომ სამართლიანია ტოლობა $R(D_1') \cap R(D_2') = R(D_4')$.

დავუშვათ, რომ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_3')$, მაშინ

$$\begin{aligned} &Y_T^{\alpha} \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\ &Y_T^{\alpha} \supseteq Z_2,\ Y_{T'}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing. \end{aligned} \qquad ...(3.2.4)$$

ბოლო პირობებიდან მივიღებთ, რომ

$$Y_T^{\alpha} \supseteq Z_7 \cup Z_2 = \breve{D},\ \breve{D} \cap Y_{T'}^{\alpha} \neq \varnothing$$

ე.ი.

$$Y_T^{\alpha} \cap Y_{T'}^{\alpha} \supseteq \breve{D} \cap Y_{T'}^{\alpha} \neq \varnothing.$$

ბოლო უტოლობა ეწინააღმდეგება α მიმართების წარმოდგენის კვაზინორმალურობას. ამგვარად, ადგილი აქვს $R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing .$$

მივიღეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned}&R(D_1')\cap R(D_2')=R(D_4'),\\&R(D_1')\cap R(D_3')=\varnothing,\\&R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing.\end{aligned} \quad \text{...(3.2.5)}$$

ასეთ შემთხვევაში მეორე და მეხუთე ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}|R^*(Q_2)|=&\left|R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\right|=\\&=|R(D_1')|+|R(D_2')|+|R(D_3')|-\\&-|R(D_1')\cap R(D_2')|-|R(D_1')\cap\\&\cap R(D_3')|-|R(D_2')\cap R(D_3')|+\\&+|R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')|=\\&=|R(D_1')|+|R(D_2')|+|R(D_3')|-|R(D_4')|.\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა. 3.2.4. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_2)|=15\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

დამტკიცება. ლემა 3.2.3- ის თანახმად სამართლიანია ტოლობა

$$\begin{aligned}|R^*(Q_2)|=&|R(D_1')|+|R(D_2')|+|R(D_3')|-|R(D_4')|=\\&=15\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+15\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+15\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}-15\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}=\\&=15\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

3) გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned}Q_2\theta_{XI}=&\left\{\left\{Z_7,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_1\right\},\right.\\&\left\{Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_1,\breve{D}\right\},\\&\left\{Z_7,Z_6\right\},\left\{Z_7,Z_4\right\},\\&\left\{Z_7,Z_3\right\},\left\{Z_7,Z_1\right\},\\&\left\{Z_6,Z_3\right\},\left\{Z_6,Z_1\right\},\\&\left\{Z_6,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,\breve{D}\right\},\\&\left\{Z_4,Z_1\right\},\left\{Z_4,\breve{D}\right\},\\&\left.\left\{Z_3,\breve{D}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

ახლა თუ

$$
\begin{aligned}
D_1' &= \{Z_7, Z_6, \breve{D}\},\\
D_2' &= \{Z_7, Z_4, \breve{D}\},\\
D_3' &= \{Z_7, Z_3, \breve{D}\},\\
D_4' &= \{Z_7, Z_1, \breve{D}\},\\
D_5' &= \{Z_5, Z_1, \breve{D}\},\\
D_6' &= \{Z_7, Z_6, Z_3\},\\
D_7' &= \{Z_7, Z_4, Z_1\},\\
D_8' &= \{Z_7, Z_6, Z_1\},\\
D_9' &= \{Z_6, Z_1, \breve{D}\},\\
D_{10}' &= \{Z_6, Z_3, \breve{D}\},\\
D_{11}' &= \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}.
\end{aligned}
$$

მაშინ თეორემა 3.0.5-დან მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
R^*(Q_3) = {} & R(D_1') \cup R(D_2') \cup \\
& \cup R(D_3') \cup R(D_4') \cup \\
& \cup R(D_5') \cup R(D_6') \cup \\
& \cup R(D_7') \cup R(D_8') \cup \\
& \cup R(D_9') \cup R(D_{10}') \cup R(D_{11}').
\end{aligned} \qquad ...(3.2.6)
$$

ლემა 3.2.5 ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$. მაშინ

$$
\begin{aligned}
|R^*(Q_3)| = {} & |R(D_1')| + |R(D_2')| + \\
& + |R(D_3')| + |R(D_4')| + \\
& + |R(D_5')| - |R(D_1') \cap R(D_3')| - \\
& - |R(D_1') \cap R(D_4')| - \\
& - |R(D_2') \cap R(D_4')|.
\end{aligned}
$$

დამტკიცება. ვთქვათ $' = \{ \quad ' \quad ''\}$ არის θ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი და $\alpha \in R(D')$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ რომელიღაც $' \quad '' \in \quad ,$ $\subset \; ' \subset \; ''$, $^\alpha \quad _{'}^{\alpha} \quad _{''}^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$-თვის და თეორემა 3.1.1-ის c) წინადადების თანახმად აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს $^\alpha \supseteq \quad$, $^\alpha \cup \; _{'}^{\alpha} \supseteq \; '$, $_{'}^{\alpha} \cap \; ' \neq \varnothing$, $_{''}^{\alpha} \cap \; '' \neq \varnothing$. $\Sigma_4(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერთა განსაზღვრის თანახმად გვაქვს $\supseteq$ ან $\supseteq$ და $'' \subseteq \; \breve{}$. ამიტომაც $^\alpha \supseteq \quad$, $^\alpha \cup \; _{'}^{\alpha} \supseteq \; '$, $_{'}^{\alpha} \cap \; ' \neq \varnothing$, $_{''}^{\alpha} \cap \; '' \neq \varnothing$ პირობებიდან გამომდინარეობს:

$$^{\alpha} \supseteq \quad , \quad ^{\alpha} \cup \ ^{\alpha}_{\prime} \supseteq \ ', \quad ^{\alpha}_{\prime} \cap \ ' \neq \varnothing , \quad ^{\alpha}_{\prime\prime} \cap \ \breve{} \neq \varnothing$$

ან

$$^{\alpha} \supseteq \quad , \quad ^{\alpha} \cup \ ^{\alpha}_{\prime} \supseteq \ ', \quad ^{\alpha}_{\prime} \cap \ ' \neq \varnothing , \quad ^{\alpha}_{\prime\prime} \cap \ \breve{} \neq \varnothing ,$$

ე.ი., $\alpha \in \left(\left\{ \quad ' \ \breve{} \right\}\right)$ ან $\alpha \in \left(\left\{ \quad ' \ \breve{} \right\}\right)$. ამ პირობების გათვალისწინებით (3.2.6) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$R^{*}(Q_3) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \cup R(D_4') \cup R(D_5') . \qquad ...(3.2.7)$$

ახლა, ვთქვათ $' = \{ \quad ' \ ''\}$ და $'' = \{ \quad ' \ ''\}$ არიან $\{ \ ' \ ' \ ' \ ' \ '\}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები, $D' \neq D''$ და $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$. მაშინ ერთდროულად ადგილი ექნება შემდეგ პირობებს

$$\begin{gathered}
Y_T^{\alpha} \supseteq Y,\ Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Y', \\
Y_{T'}^{\alpha} \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_{T''}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\
Y_T^{\alpha} \supseteq Y_1,\ Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Y_1', \\
Y_{T'}^{\alpha} \cap Y_1' \neq \varnothing,\ Y_{T''}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing.
\end{gathered}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$^{\alpha} \supseteq \ \cup \ , \quad ^{\alpha} \cup \ ^{\alpha}_{\prime} \supseteq \ ' \cup \ ' .$$

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

) $' \in \{ \ ' \ ' \ ' \ ' \ '\}$ და $'' = \ '$. მაშინ

$$^{\alpha} \supseteq \ \cup \ = \ \cup \ = \ .$$

დაშვების თანახმად $'' = \ '$ და ამიტომაც

$$\begin{gathered}
Y_T^{\alpha} \supseteq Z_5,\ Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Z_1, \\
Y_{T'}^{\alpha} \cap Z_1 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing .
\end{gathered}$$

ამგვარად, $^{\alpha} \cap \ ^{\alpha}_{\prime} \supseteq \ \cap \ ^{\alpha}_{\prime} \neq \varnothing$ რაც ეწინააღმდეგება α მიმართების წარმოდგენის კვაზინორმალურობის პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $R(D') \cap R(D_5') = \varnothing$. ამიტომაც,

$$\begin{gathered}
(\ ') \cap \ (\ ') = \varnothing \qquad (\ ') \cap \ (\ ') = \varnothing \\
(\ ') \cap \ (\ ') = \varnothing \qquad (\ ') \cap \ (\ ') = \varnothing
\end{gathered}$$

...(3.2.8)

2) ახლა ვთქვათ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2'')$, მაშინ თეორემა $0.1-$ის c) წინადადების თანახმად

$$\begin{aligned}
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,
\end{aligned}$$

ე.ი. ბოლო პირობები სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{aligned}
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\\
&Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing
\end{aligned} \quad . \qquad \text{...(3.2.9)}$$

მეორეს მხრივ, თუ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \cap R(D_4'')$, მაშინ

$$\begin{aligned}
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.
\end{aligned}$$

ე.ი. ბოლო პირობები სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{aligned}
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ \ Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\\
&Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing
\end{aligned} \quad . \qquad \text{...(3.2.10)}$$

მეცხრე და მეათე პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$R(D_1') \cap R(D_2'') = R(D_1') \cap R(D_2') \cap R(D_4'').$$

ვ) ახლა ვთქვათ $\alpha \in R(D_2') \cap R(D_3'')$, მაშინ თეორემა 3.1.1-ის c) წინადადების თანახმად

$$\begin{aligned}
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,
\end{aligned}$$

ე.ი.

$${}^{\alpha} \cup {}^{\alpha}_{\prime} \supseteq \quad \cup \quad = \breve{\ },\ \left({}^{\alpha} \cup {}^{\alpha}_{\prime} \right) \cap {}^{\alpha}_{\prime\prime} \supseteq \breve{\ } \cap {}^{\alpha}_{\prime\prime} \neq \varnothing .$$

ბოლო უტოლობა ეწინააღმდეგება α მიმართების წარმოდგენის კვაზინორმალურობის პირობას. ამიტომაც $R(D_2') \cap R(D_3'') = \varnothing$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $R(D_3')\cap R(D_4'')=\varnothing$. ამგვარად სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{array}{l} R(D_1')\cap R(D_2'')=R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_4''),\\ R(D_1')\cap R(D_5')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_5')=\varnothing,\\ R(D_3')\cap R(D_5')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_5')=\varnothing,\\ R(D_2')\cap R(D_3'')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_4'')=\varnothing. \end{array}$$

...(3.2.11)

მეშვიდე და მეთერთმეტე ტოლობების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\begin{array}{l} \left|R^*(Q_3)\right|=\left|R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4')\cup R(D_5')\right|=\\ \quad=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|+\left|R(D_5')\right|-\\ \quad-\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_4')\right|. \end{array}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.6. ვთქვათ $\; ' = \{ \quad ' \; \breve{} \}$ და $\; '' = \{ \quad ' \; \breve{} \}$, სადაც $\; ' \supseteq \; '$. თუ

( ) ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha=\left({}^{\alpha}\times \quad \right)\cup\left({}^{\alpha}\times \quad \right)\cup\left({}^{\alpha}\times \breve{} \right)$,

რომელიღაც $\in$, $\subset \; \subset \breve{}$ და ${}^{\alpha} \; {}^{\alpha} \; {}^{\alpha} \notin\{\varnothing\}$, მაშინ

$$\alpha\in R(D')\cap R(D'')$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{array}{l} Y_7^{\alpha}\supseteq Z_7,\ Y_7^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq Y_1',\\ Y_T^{\alpha}\cap Y'\neq\varnothing,\ Y_0^{\alpha}\cap \breve{D}\neq\varnothing. \end{array}$$

დამტკიცება. თუ $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$ მაშინ

$$\begin{array}{l} Y_7^{\alpha}\supseteq Z_7,\ Y_7^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq Y',\\ Y_T^{\alpha}\cap Y'\neq\varnothing,\ Y_0^{\alpha}\cap \breve{D}\neq\varnothing,\\ Y_7^{\alpha}\supseteq Z_7,\ Y_7^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq Y_1',\\ Y_T^{\alpha}\cap Y_1'\neq\varnothing,\ Y_0^{\alpha}\cap \breve{D}\neq\varnothing. \end{array} \qquad ...(3.2.12)$$

უკანასკნელი პირობებიდან მივიღებთ

$$\begin{array}{l} Y_7^{\alpha}\supseteq Z_7,\ Y_7^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq Y_1',\\ Y_T^{\alpha}\cap Y'\neq\varnothing,\ Y_0^{\alpha}\cap \breve{D}\neq\varnothing, \end{array} \qquad ...(3.2.13)$$

რადგანაც დაშვების თანახმად სრულდება ჩართვა $\; '\supseteq \; '$.

მეორეს მხრივ, თუ სამართლიანი იქნება (3.2.13) პირობები, მაშინ ასევე შესრულდება (3.2.12) პირობებიც, ე.ი., სამართლიანი იქნება პირობაც $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.7. ვთქვათ $D = \left\{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\} \in \Sigma_4 (X, 8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობები:

$$
\begin{aligned}
\left| R(D_1') \cap R(D_3') \right| &= 11 \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_6|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|} \right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}, \\
\left| R(D_1') \cap R(D_4') \right| &= 11 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_6|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} \right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}, \\
\left| R(D_2') \cap R(D_4') \right| &= 11 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} \right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

დამტკიცება ვთქვათ $' = \{ \quad ' \; \breve{} \}$ და $'' = \{ \quad ' \; \breve{} \}$, სადაც $D' \neq D''$ და $' \supseteq \; '$. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ და $(\;)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \left({}^{\alpha} \times \quad \right) \cup \left({}^{\alpha} \times \quad \right) \cup \left({}^{\alpha} \times \breve{} \right)$, რომელიღაც $\in$, $\subset \; \subset \breve{}$ და ${}^{\alpha} \; {}^{\alpha} \; {}^{\alpha} \notin \{\varnothing\}$, მაშინ ლემა 3.2.6 - ის გამოყენებით მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
& Y_7^{\alpha} \supseteq Z_7, \; Y_7^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \supseteq Y_1', \\
& Y_T^{\alpha} \cap Y' \neq \varnothing, \; Y_0^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing.
\end{aligned}
\qquad \text{...(3.2.14)}
$$

ახლა დავუშვათ, რომ $_{\alpha}$ არის სიმრავლის ნახევარმესერში ისეთი ასახვა, რომ $_{\alpha}(\;) = \alpha$ ნებისმიერი $\in$ $-$სთვის. ვიგულისხმოთ, რომ $_{\alpha} \; _{\alpha} \; _{\alpha}$ და $_{\alpha}$ წარმოადგენენ $_{\alpha}$ ასახვის შეზღუდვებს შესაბამისად , $'$, $\breve{} \;\; '$ და $\breve{}$ სიმრავლეებზე. ცხადია $\left\{ \quad ' \quad \breve{} \quad ' \quad \breve{} \right\}$ სიმრავლის ელემენტები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან და მათი გაერთიანება კი სიმრავლის ტოლია.

ახლა შევისწავლოთ ცალკ-ცალკე $_{\alpha} \; _{\alpha} \; _{\alpha}$ და $_{\alpha}$ ასახვები.

) თუ $\in$, მაშინ (3.2.14) პირობების თანახმად გვექნება $\in \; ^{\alpha}$. აქედან კი $^{\alpha}$ სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $\alpha =$.

ამგვარად $_{\alpha}(\;) =$ ყოველი $\in$ $-$სთვის.

) თუ $\in \; '$, მაშინ ( ) პირობების თანახმად გვექნება

$$\in \;' \quad \subseteq \;' \subseteq \;^{\alpha} \cup \;^{\alpha}$$

აქედან კი $^{\alpha}$ და $^{\alpha}$ სიმრავლეთა განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $\alpha \in \{ \quad \}$,

ე.ი. $_{\alpha}(\;) \in \{ \quad \}$ ნებისმიერი $\in \;'$ $-$სათვის.

მოცემულობის თანახმად $^{\alpha} \cap \;' \neq \varnothing$. ამიტომაც $\alpha =$ რომელიღაც $\in \;'$$-$სათვის. თუ $\in$, მაშინ (3.2.14) პირობების თანახმად გვექნება $\alpha =$. ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $\alpha =$ ტოლობას, რადგან $\neq$. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $\in \;'$.

ამგვარად $_{\alpha}(\;) =$ რომელიღაც $\in \;'$ $-$სათვის.

) თუ $\in \breve{} \;'$, მაშინ (3.2.14) პირობების თანახმად გვექნება

$$\in \breve{} \;' \subseteq \breve{} \subseteq \; = \;^{\alpha} \cup \;^{\alpha} \cup \;^{\alpha}$$

აქედან კი $^{\alpha}$, $^{\alpha}$ და $^{\alpha}$ სიმრავლეთა განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $\alpha \in \left\{ \quad \breve{} \right\}$, ე.ი.,

$$_{\alpha}(\;) \in \left\{ \quad \breve{} \right\}$$

ნებისმიერი $\in \breve{} \;'$$-$სათვის.

მოცემულობის თანახმად $^{\alpha} \cap \breve{} \neq \varnothing$. ამიტომაც $\alpha = \breve{}$ რომელიღაც $\in \breve{}$$-$სათვის. თუ $\in \;'$, მაშინ ( ) პირობების თანახმად გვექნება $\alpha \in \{ \quad \}$. ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $\alpha = \breve{}$ ტოლობას, რადგან $\breve{} \notin \{ \quad \}$. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $\in \breve{} \;'$.

ამგვარად $_{\alpha}(\;) = \breve{}$ რომელიღაც $\in \breve{} \;'$ - თვის.

) თუ $\in \quad \breve{}$, მაშინ (3.2.14) პირობების თანახმად გვექნება

$$\in \quad \breve{} \subseteq \; = \;^{\alpha} \cup \;^{\alpha} \cup \;^{\alpha}$$

აქედან კი $^{\alpha}$, $^{\alpha}$ და $^{\alpha}$ სიმრავლეთა განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $\alpha \in \left\{ \quad \breve{} \right\}$, ე.ი.,

$$_{\alpha}(\;) \in \left\{ \quad \breve{} \right\}$$

ნებისმიერი $\in \quad \breve{}$ $-$თვის.

ამგვარად, ყოველი $\alpha \in R(D')\cap R(D'')$-თვის არსებობს ასახვათა $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სისტემა. ამასთან, განსხვავებულ ბინარულ მიმართებებს შეესაბამება განსხვავებული სისტემები.

ახა ვთქვათ

$$\to \{ \quad \},$$

$$' \quad \to \{ \quad \},$$

$$\breve{} \quad ' \to \left\{ \quad \breve{} \right\},$$

$$\breve{} \to \left\{ \quad \breve{} \right\}$$

ისეთი ასახვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

) $(\ ) =$ ყოველი $\in$ - თვის;

) $(\ ) \in \{ \quad \}$, ყოველი $\in \ '$ - თვის და $_{\alpha}(\ ) =$ რომელიღაც $\in \ '$ - თვის;

) $(\ ) \in \left\{ \quad \breve{} \right\}$, ყოველი $\in \breve{} \quad '$ - თვის და $_{\alpha}(\ ) = \breve{}$ რომელიღაც $\in \breve{} \quad '$- თვის;

) $(\ ) \in \left\{ \quad \breve{} \right\}$, ყოველი $\in \quad \breve{}$ - თვის.

ახლა განვმარტოთ $\to$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t)=\begin{cases} f_0(t), \ if \ t \in Z_7, \\ f_1(t), \ if \ t \in Y_1' \setminus Z_7, \\ f_2(t), \ if \ t \in \breve{D} \setminus Y_1', \\ f_3(t), \ if \ t \in X \setminus \breve{D}. \end{cases}$$

მას შევუსაბამოთ $(\ )$ ნახევარჯგუფის ბინარული $\beta = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ მიმართება.

ახლა თუ

$$\boldsymbol{Y_7^{\beta} = \{t \mid t\beta = Z_7\}},$$

$$\boldsymbol{Y_T^{\beta} = \{t \mid t\beta = T\}},$$

$$Y_0^{\beta} = \left\{t \mid t\beta = \breve{D}\right\},$$

მაშინ β მიმართება ჩაიწერება სახით

$$\beta = \left(Y_7^{\beta} \times Z_7\right) \cup \left(Y_T^{\beta} \times T\right) \cup \left(Y_0^{\beta} \times \breve{D}\right)$$

და იგი დააკმაყოფილებს პირობებს

$$
\begin{aligned}
&Y_7^{\beta} \supseteq Z_7,\ Y_7^{\beta} \cup Y_T^{\beta} \supseteq Y_1',\\
&Y_T^{\beta} \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_0^{\beta} \cap \breve{D} \neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

(მოცემულობის თანახმად $(\ \ ) =$ რომელიღაც $\in\ '$ $-$სათვის და

$(\ \ ) =\ \breve{}$ რომელიღაც $\in\ \breve{}\ \ '$ - სათვის). ამიტომაც ლემა 3.2.6 - ის თანახმად $\beta \in R(D') \cap R(D'')$.

მივიღეთ, რომ α ბინარულ მიმართებებს აღებულს $R(D') \cap R(D'')$ სიმრავლი-დან და ასახვათა $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სისტემებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა.

ასახვათა სისტემის რაოდენობა 3.0.6 თეორემის თანახმად ტოლია

შევნიშნოთ, რომ რიცხვი არ არის დამოკიდე-ბული $T \subset T' \subset T''$ $(T, T', T'' \in D)$ ჯაჭვების შერჩევაზე და რადგან განსხვავებულ სამ ელემენტიან ჯაჭვთა რაოდენობა 11 -ის ტოლია, ამიტომ

$$
\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 11 \cdot 2^{\left|Y_1' \setminus Y'\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus Z_7\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}.
$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
\left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| &= 11 \cdot 2^{\left|Z_3 \setminus Z_6\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_7\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|},\\
\left|R(D_1') \cap R(D_4')\right| &= 11 \cdot 2^{\left|Z_1 \setminus Z_6\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_7\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|},\\
\left|R(D_2') \cap R(D_4')\right| &= 11 \cdot 2^{\left|Z_1 \setminus Z_4\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_7\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}.
\end{aligned}
$$

ლემა დამტკიცებულია

ლემა 3.2.8. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_4(X, 8)$.

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$
\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_3\right)\right| = {} & 11\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+11\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+11\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+11\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+11\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-11\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-11\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-11\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

დამტკიცება. ლემა 3.2.5 - ის თანახმად სამართლიანია ტოლობა:

$$
\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_3\right)\right| = {} & \left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|+\left|R\left(D_5'\right)\right|-\\
&-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)\right|=.\\
&=11\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+11\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+11\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+11\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+11\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-11\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-11\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-11\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

ლემა დამტკიცებულია.

4) გაერთიანებათა ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$Q_4\theta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\right\}\right\}$$

ახლა თუ

$$
\begin{aligned}
D_1' &= \left\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\\
D_2' &= \left\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\right\},\\
D_3' &= \left\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\right\}
\end{aligned}
$$

მაშინ თეორემა 3.0.5-დან მივიღებთ:

$$R^{*}\left(Q_{4}\right)=R\left(D_{1}^{\prime}\right) \cup R\left(D_{2}^{\prime}\right) \cup R\left(D_{3}^{\prime}\right) \qquad \ldots(3.2.15)$$

ლემა 3.2.9. ვთქვათ $D=\left\{Z_{7}, Z_{6}, Z_{5}, Z_{4}, Z_{3}, Z_{2}, Z_{1}, \breve{D}\right\} \in \Sigma_{4}(X, 8)$.

მაშინ

$$\left|R^{*}\left(Q_{4}\right)\right|=\left|R\left(D_{1}^{\prime}\right)\right|+\left|R\left(D_{2}^{\prime}\right)\right|+\left|R\left(D_{3}^{\prime}\right)\right| .$$

დამტკიცება. ვთქვათ $' = \{ \quad \breve{} \}$ და $'' = \{ \quad ' \quad ' \quad \breve{} \}$ არიან θ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები და $\alpha \in R(D') \cap R(D')$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_{7}^{\alpha} \times Z_{7}\right) \cup\left(Y_{T}^{\alpha} \times T\right) \cup\left(Y_{Z}^{\alpha} \times Z\right) \cup\left(Y_{0}^{\alpha} \times \breve{D}\right),$$

რომელიღაც $\in \quad , \quad \subset \quad \subset \quad \subset \breve{}$, $Y_{7}^{\alpha}, Y_{T}^{\alpha}, Y_{Z}^{\alpha}, Y_{0}^{\alpha} \notin\{\varnothing\}$ და

$$Y_{7}^{\alpha} \supseteq \varphi\left(Z_{7}\right) \; Y_{7}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \supseteq \varphi(T),$$

$$Y_{7}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \cup Y_{Z}^{\alpha} \supseteq \varphi(Z),$$

$$Y_{T}^{\alpha} \cap \varphi(T) \neq \varnothing,$$

$$Y_{Z}^{\alpha} \cap \varphi(Z) \neq \varnothing,$$

$$Y_{0}^{\alpha} \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing .$$

ახლა თუ $\alpha \in R\left(D_{1}^{\prime}\right) \cap R\left(D_{2}^{\prime}\right)$, მაშინ ერთდროულად ადგილი ექნება შემდეგ პირობებს

$$\begin{aligned}
& Y_{7}^{\alpha} \supseteq Z_{7},\; Y_{7}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \supseteq Z_{4}, \\
& Y_{7}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \cup Y_{Z}^{\alpha} \supseteq Z_{1},\; Y_{T}^{\alpha} \cap Z_{4} \neq \varnothing, \\
& Y_{Z}^{\alpha} \cap Z_{1} \neq \varnothing,\; Y_{0}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing ; \\
& Y_{T}^{\alpha} \supseteq Z_{7},\; Y_{7}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \supseteq Z_{6}, \\
& Y_{7}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \cup Y_{Z}^{\alpha} \supseteq Z_{1},\; Y_{T}^{\alpha} \cap Z_{6} \neq \varnothing, \\
& Y_{Z}^{\alpha} \cap Z_{1} \neq \varnothing,\; Y_{0}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing .
\end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ $\;^{\alpha} \cup \;^{\alpha} \supseteq \; \cup \; = \;$, $\left(\;^{\alpha} \cup \;^{\alpha}\right) \cap \;^{\alpha} \supseteq \; \cap \;^{\alpha} \neq \varnothing$. მაგრამ უტოლობა $\left(\;^{\alpha} \cup \;^{\alpha}\right) \cap \;^{\alpha} \neq \varnothing$ ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური სახით წარმოდგენის პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $R\left(D_{1}^{\prime}\right) \cap R\left(D_{2}^{\prime}\right)=\varnothing$.

ახლა ვთქვათ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_3')$, მაშინ ერთდროულად ადგილი ექნება შემდეგ პირობებს

$$
\begin{aligned}
&Y_7^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4,\\
&Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_1,\\
&Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\\
&Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;\\
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6,\\
&Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_3,\\
&Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\\
&Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

საიდანაც მივიღებთ $\ ^\alpha \cup \ ^\alpha \cup \ ^\alpha \supseteq \ \cup \ = \breve{}\ \left(\ ^\alpha \cup \ ^\alpha \cup \ ^\alpha \right) \cap \ ^\alpha \supseteq \breve{}\ \cap \ ^\alpha \neq \varnothing$.

მაგრამ უტოლობა $\left(\ ^\alpha \cup \ ^\alpha \cup \ ^\alpha \right) \cap \ ^\alpha \neq \varnothing$ ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური სახით წარმოდგენის პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing$.

ბოლოს დავუშვათ, რომ $\alpha \in R(D_2') \cap R(D_3')$, მაშინ ერთდროულად ადგილი ექნება შემდეგ პირობებს

$$
\begin{aligned}
&Y_7^\alpha \supseteq Z_7,\\
&Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6,\\
&Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_1,\\
&Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\\
&Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;\\
&Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\\
&Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6,\\
&Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_3,\\
&Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\\
&Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\ ^\alpha \cup \ ^\alpha \cup \ ^\alpha \supseteq \ \cup \ = \breve{}$$

$$\left(\ ^\alpha \cup \ ^\alpha \cup \ ^\alpha \right) \cap \ ^\alpha \supseteq \breve{}\ \cap \ ^\alpha \neq \varnothing.$$

მაგრამ უტოლობა $\left({}^{\alpha} \cup {}^{\alpha} \cup {}^{\alpha} \right) \cap {}^{\alpha} \neq \varnothing$ ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური სახით წარმოდგენის პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ

$$R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_3'\right) = \varnothing .$$

მივიღეთ, რომ

$$R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right) = \varnothing,\ R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_3'\right) = \varnothing,\ R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_3'\right) = \varnothing . \quad ...(3.2.16)$$

(3.2.15) და (3.2.16) ტოლობათა გამოყენებით მივიღებთ:

$$| R^*(Q_4) | = \left| R(D_1') \right| + \left| R(D_2') \right| + \left| R(D_3') \right| .$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.10. ვთქვათ,

$$D = \left\{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\} \in \Sigma_4\left(X, 8\right).$$

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\begin{aligned} | R^*\left(Q_4\right) | = {} & 3 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} \right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & + 3 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_6|} \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} \right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & + 3 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_6|} \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|} \right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}. \end{aligned}$$

დამტკიცება. ლემა 3.2.9 - ის თანახმად სამართლიანია ტოლობა

$$| R^*(Q_4) | = \left| R(D_1') \right| + \left| R(D_2') \right| + \left| R(D_3') \right|$$

ამ ტოლობების გამოყენებით და შემდგომი გარდაქმნებით მივიღეთ:

$$\begin{aligned} | R^*\left(Q_4\right) | = {} & \left| R\left(D_1'\right) \right| + \left| R\left(D_2'\right) \right| + \left| R\left(D_3'\right) \right| = \\ & = 3 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \right) \cdot \\ & \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} \right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + 3 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \\ & \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_6|} \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} \right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & + 3 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_6|} \right) \cdot \\ & \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|} \right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

5) გაერთიანებათა ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$Q_5\theta_{XI}=\left\{\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\right\}$$

ახლა თუ

$$\begin{aligned}
D_1' &= \{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\\
D_2' &= \{Z_7,Z_4,Z_6,Z_1\},\\
D_3' &= \{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\\
D_4' &= \{Z_7,Z_3,Z_4,\breve{D}\},\\
D_5' &= \{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\\
D_6' &= \{Z_7,Z_1,Z_3,\breve{D}\},\\
D_7' &= \{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\\
D_8' &= \{Z_6,Z_1,Z_3,\breve{D}\}.
\end{aligned}$$

მაშინ თეორემა 3.0.5-დან მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
R^*(Q_5) = {} & R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4')\cup\\
& \cup R(D_5')\cup R(D_6')\cup R(D_7')\cup R(D_8').
\end{aligned} \qquad ..(3.2.17)$$

ლემა 3.2.11. ვთქვათ $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_4(X,8)$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\begin{aligned}
\left|R^*(Q_5)\right| = {} & \left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\\
& +\left|R(D_4')\right|+\left|R(D_5')\right|+\left|R(D_6')\right|-\\
& -\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_3')\right|-\\
& -\left|R(D_3')\cap R(D_6')\right|-\left|R(D_4')\cap R(D_5')\right|.
\end{aligned}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $D'=\{Z,Z',Z'',Z'\cup Z''\}$ არის $Q_5\theta_{XI}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი და $\alpha\in R(D')$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება სახე:

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times\left(T'\cup T''\right)\right),$$

სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და თეორემა 3.1.1-ის $e)$ წინადადების თანახმად გვექნება:

$$Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z',$$

$$Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z'',$$

$$Y_{T'}^\alpha\cap Z'\neq\varnothing,$$

$$Y_{T''}^\alpha\cap Z''\neq\varnothing.$$

ამიტომაც სამართლიანი იქნება შემდეგი ჩართვები:

$$\begin{aligned}
R(D_7') &\subseteq R(D_5'),\\
R(D_8') &\subseteq R(D_6'),
\end{aligned} \qquad ...(3.2.18)$$

(3.2.17) და (3.2.18)ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$R^*\left(Q_5\right)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)\cup R\left(D_3'\right)\cup R\left(D_4'\right)\cup R\left(D_5'\right)\cup R\left(D_6'\right). \qquad ...(3.2.19)$$

ახლა ვაჩვენოთ შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

$$\begin{array}{l} R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing, R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing, \\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing,\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing,\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing, \\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing,\ R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing, R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing, \\ R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing,\ R\left(D_5'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing. \end{array} \qquad ...(3.2.20)$$

მართლაც, ვთქვათ $D'=\{Z_7,Y,Y',Y\cup Y'\}$ და $D''=\{Z_7,Y_1,Y_1',Y_1\cup Y_1'\}$ არიან $\{D_1',D_2',D_3',D_4',D_5',D_6'\}$ სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $' \neq \ ''$ და $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$.

ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი ჩართვები და უტოლობები:

$$\begin{array}{l} Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y, \\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Y', \\ Y_{T'}^\alpha\cap Y\neq\varnothing, \\ Y_{T''}^\alpha\cap Y'\neq\varnothing, \\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1, \\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Y_1', \\ Y_{T'}^\alpha\cap Y_1\neq\varnothing, \\ Y_{T''}^\alpha\cap Y_1'\neq\varnothing. \end{array}$$

ბოლო პირობებიდან მივიღებთ:

$$\begin{array}{l} Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y\cup Y_1, \\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Y'\cup Y_1' \end{array}.$$

ახლა D' და D'' ნახევარმესერებისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

1) $Y\cup Y_1=\breve{D}$. მაშინ

$$\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap Y_{T''}^\alpha\supseteq\breve{D}\cap Y_{T''}^\alpha\supseteq Y'\cap Y_{T''}^\alpha\neq\varnothing.$$

მაგრამ ბოლო უტოლობა ეწინააღმდეგება α მიმართების წარმოდგენის კვაზინორმალურობას. ამიტომაც $R(D')\cap R(D'')=\varnothing$. აქედან და მოცემული ნახევარმესერის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

$$\begin{array}{l} R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing, \\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing, \\ R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing, \\ R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing, \\ R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing, \\ R\left(D_5'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing. \end{array}$$

2) $Y_1 \cup Y_1' = \breve{D}$. მაშინ $\left(Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha\right) \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Y \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$. მაგრამ ბოლო უტოლობა ეწინააღმდეგება α მიმართების წარმოდგენის კვაზინორმალურობას. ამიტომაც $R(D') \cap R(D'') = \varnothing$. აქედან და მოცემული ნახევარმესერის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

$$
\begin{gathered}
R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing, \\
R(D_1') \cap R(D_6') = \varnothing, \\
R(D_3') \cap R(D_4') = \varnothing, \\
R(D_3') \cap R(D_5') = \varnothing, \\
R(D_4') \cap R(D_6') = \varnothing, \\
R(D_5') \cap R(D_6') = \varnothing,
\end{gathered}
$$

3) $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ჩართვები და უტოლობები:

$$
\begin{gathered}
Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, \\
Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_4, \\
Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing, \\
Y_{T''}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, \\
Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4, \\
Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_6, \\
Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, \\
Y_{T''}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing.
\end{gathered}
$$

აქედან მივიღებთ $\left(Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha\right) \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1 \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$. მაგრამ ბოლო უტოლობა ეწინააღმდეგება α მიმართების წარმოდგენის კვაზინორმალურობას. ამიტომაც $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$.

4) $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_5')$. ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი ჩართვები და უტოლობები:

$$
\begin{gathered}
Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, \\
Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_4, \\
Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing, \\
Y_{T''}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, \\
Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3, \\
Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1, \\
Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing, \\
Y_{T''}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing.
\end{gathered}
$$

აქედან მივიღებთ $\left(Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha\right) \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3 \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$. მაგრამ ბოლო უტოლობა ეწინააღმდეგება α მიმართების წარმოდგენის კვაზინორმალურობას. ამიტომაც $R(D_1') \cap R(D_5') = \varnothing$.

5) $\alpha \in R(D_2') \cap R(D_6')$. ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი ჩართვები და უტოლობები:

$$
\begin{aligned}
&Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4,\\
&Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_6,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\\
&Y_{T''}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\\
&Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\\
&Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_3,\\
&Y_{T'}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\\
&Y_{T''}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

აქედან მივიღებთ

$$\left(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha\right) \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1 \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_6 \cap Y_{T''}^\alpha \neq \varnothing.$$

მაგრამ ბოლო უტოლობა ეწინააღმდეგება α მიმართების წარმოდგენის კვაზინორმალურობას. ამიტომაც $R(D_2') \cap R(D_6') = \varnothing$.

ახლა მესამე და მეოთხე ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
\left|R^*(Q_5)\right| = {} & \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \\
& + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| + \left|R(D_6')\right| - \\
& - \left|R(D_1') \cap R(D_4')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_3')\right| - \\
& - \left|R(D_3') \cap R(D_6')\right| - \left|R(D_4') \cap R(D_5')\right|.
\end{aligned}
$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.12. ვთქვათ, $D' = \{Z_7, Y, Y', Y \cup Y'\}$ და $D'' = \{Z_7, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1'\}$ არიან $\{D_1', D_2', D_3', D_4', D_5', D_6'\}$ სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $' \neq ''$, $\supseteq$, $' \supseteq '$ და $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T''}^\alpha \times \left(T' \cup T''\right)\right),$$

სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$. მაშინ $\alpha \in \ (\ ') \cap \ (\ '')$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$
\begin{aligned}
&Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Y_1,\\
&Y_T^{\alpha} \cup Y_{T''}^{\alpha} \supseteq Y_1',\\
&Y_{T'}^{\alpha} \cap Y \neq \varnothing,\\
&Y_{T''}^{\alpha} \cap Y' \neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha \in \ (\ ')\cap\ (\ '')$. მაშინ თეორემა 3.1.8-ის e) წინადადების თანახმად გვექნება:

$$
\begin{aligned}
&Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Y,\\
&Y_T^{\alpha} \cup Y_{T''}^{\alpha} \supseteq Y',\\
&Y_{T'}^{\alpha} \cap Y \neq \varnothing,\\
&Y_{T''}^{\alpha} \cap Y' \neq \varnothing;\\
&Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Y_1,\\
&Y_T^{\alpha} \cup Y_{T''}^{\alpha} \supseteq Y_1',\\
&Y_{T'}^{\alpha} \cap Y_1 \neq \varnothing,\\
&Y_{T''}^{\alpha} \cap Y_1' \neq \varnothing.
\end{aligned}
\qquad \ldots(3.2.21)
$$

ბოლო პირობებიდან და ჩართვებიდან $\ \supseteq\ ,\ \ '\supseteq\ '$ მივიღებთ, რომ

$$
\begin{aligned}
&Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Y_1,\\
&Y_T^{\alpha} \cup Y_{T''}^{\alpha} \supseteq Y_1',\\
&Y_{T'}^{\alpha} \cap Y \neq \varnothing,\\
&Y_{T''}^{\alpha} \cap Y' \neq \varnothing.
\end{aligned}
\qquad \ldots(3.2.22)
$$

ახლა თუ დავუშვებთ, რომ (3.2.22) პირობები სამართლიანია, მაშინ სამართლიანი იქნება (3.2.21) პირობებიც და ამიტომაც $\alpha \in \ (\ ')\cap\ (\ '')$.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.13. ვთქვათ $D' = \{Z_7, Y, Y', Y \cup Y'\}$ და $D'' = \{Z_7, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1'\}$ არიან $\{D_1', D_2', D_3', D_4', D_5', D_6'\}$ სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $\ ' \neq\ ''$, $\ \supseteq\ $, $\ '\supseteq\ '$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$
\begin{aligned}
&|\ (\ ')\cap\ (\ '')| = \ \cdot\ |\ \ |\cdot(|\ \ |-\ )\cdot(|\ \ |-\ )\cdot\ |\ \ |\\
&|\ (\ ')\cap\ (\ ')| = \ \cdot(|\ \ |-\ )\cdot\ |\ \ |\cdot(|\ \ |-\ )\cdot\ |\ \ |\\
&|\ (\ ')\cap\ (\ ')| = \ \cdot(|\ \ |-\ )\cdot(|\ \ |-\ )\cdot\ |\ \ |\\
&|\ (\ ')\cap\ (\ ')| = \ \cdot(|\ \ |-\ )\cdot(|\ \ |-\ )\cdot\ |\ \ |
\end{aligned}
$$

დამტკიცება. ვთქვათ $D' = \{Z_7, Y, Y', Y \cup Y'\}$ და $D'' = \{Z_7, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1'\}$ არიან $\{D_1', D_2', D_3', D_4', D_5', D_6'\}$ სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $\ ' \neq\ ''$, $\ \supseteq\ $, $\ '\supseteq\ '$. თუ $\alpha \in R(D')\cap R(D\ ')'$ და $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times\left(T'\cup T''\right)\right),$$

სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, მაშინ ლემა 3.2.12ის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned}&Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1,\\&Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Y_1',\\&Y_{T'}^\alpha\cap Y\neq\varnothing,\\&Y_{T''}^\alpha\cap Y'\neq\varnothing.\end{aligned}\tag{3.2.23}$$

ახლა დავუშვათ, რომ α არის სიმრავლის ნახევარმესერში ისეთი ასახვა, რომ $_\alpha(\ )=\alpha$ ნებისმიერი $\in$ $-$სათვის. ვიგულისხმოთ, რომ α α α და α წარმოადგენენ α ასახვის შეზღუდვებს შესაბამისად $\cap\ '$, $'$, $'$ და $X\setminus\left(Y_1\cup Y_1'\right)$ სიმრავლეებზე. ცხადია $\left\{Y_1\cap Y_1',\ Y_1\setminus Y_1',\ Y_1'\setminus Y_1,\ X\setminus\left(Y_1\cup Y_1'\right)\right\}$ სიმრავლის ელემენტები წყვილ წყვილად არ იკვეთებიან და მათი გაერთიანება კი სიმრავლის ტოლია.

ახლა შევისწავლოთ ცალკ-ცალკე α α α და α ასახვები.

) თუ $t\in Y_1\cap Y_1'$, მაშინ გვექნება $t\in Y_1\cap Y_1'\subseteq\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\right)=Y_T^\alpha$, ე.ი. $t\in Y_T^\alpha$. აქედან კი $^\alpha$ სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $t\alpha=T$.

ამგვარად $_\alpha(\ )=$ ყოველი $t\in Y_1\cap Y_1'-$ სათვის.

) თუ $t\in Y_1\setminus Y_1'$, მაშინ 3.2.23 პირობების თანახმად გვექნება

$$\in\quad '\subseteq\quad\subseteq\quad ^\alpha\cup\quad ^\alpha_{'}.$$

აქედან კი $^\alpha$ და $^\alpha_{'}$ სიმრავლეთა განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $\alpha\in\{\quad '\}$, ე.ი. $_\alpha(\ )\in\{\quad '\}$ ნებისმიერი $t\in Y_1\setminus Y_1'-$ სათვის.

მოცემულობის თანახმად $Y_{T'}^\alpha\cap Y\neq\varnothing$. ამიტომაც $\alpha=\ '$ რომელიღაც $\in$ $-$სათვის. თუ $\in\ '$, მაშინ 3.2.23 პირობების თანახმად გვექნება $\alpha\in\{\quad ''\}$. ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $\alpha=\ '$ ტოლობას, რადგან $'\notin\{\quad ''\}$. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $\in\quad '$.

ამგვარად $_\alpha(\ )=\ '$ რომელიღაც $\in\quad '-$ სათვის.

) თუ $t\in Y_1'\setminus Y_1$, მაშინ გვექნება

$$t \in Y_1' \setminus Y_1 \subseteq Y_1' \subseteq Y_T^{\alpha} \cup Y_{T''}^{\alpha}.$$

აქედან კი $^{\alpha}$ და $^{\alpha}_{''}$ სიმრავლეთა განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $\alpha \in \{ \quad ''\}$, ე.ი., $_{\alpha}(\ ) \in \{ \quad ''\}$ ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Y_1-$სათვის.

მოცემულობის თანახმად $Y_{T''}^{\alpha} \cap Y' \neq \varnothing$. ამიტომაც $\alpha = \ ''$ რომელიღაც $\in \ '-$ სთვის. თუ $\in$, მაშინ 3.2.23 პირობების თანახმად გვექნება $\alpha \in \{ \quad '\}$. ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $\alpha = \ ''$ ტოლობას, რადგანაც $'' \notin \{ \quad '\}$. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $\in \ '$.

ამგვარად $_{\alpha}(\quad) = \ ''$ რომელიღაც $\in \ '$ - თვის.

) თუ $t \in X \setminus (Y_1 \cup Y_1')$, მაშინ (3.2.23) პირობების თანახმად გვექნება

$$\in \quad (\ \cup \ ') \subseteq \quad = \ ^{\alpha} \cup \ ^{\alpha}_{'} \cup \ ^{\alpha}_{''} \cup \ ^{\alpha}_{'\cup ''}.$$

აქედან კი $^{\alpha}$, $^{\alpha}_{'}$, $^{\alpha}_{''}$ და $Y_{T'\cup T''}^{\alpha}$ სიმრავლეთა განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $\alpha \in \{ \quad ' \quad '' \quad ' \cup \ ''\}$, ე.ი., $_{\alpha}(\ ) \in \{ \quad ' \quad '' \quad ' \cup \ ''\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus (Y_1 \cup Y_1')-$ თვის.

ამგვარად, ყოველი $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ არსებობს ასახვათა $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სისტემა. ამასთან განსხვავებულ ბინარულ მიმართებებს შეესაბამება განსხვავებული ასახვათა სისტემები.

ახლა, ვთქვათ

$$\cap \ ' \to \{ \ \},$$
$$' \to \{ \quad '\},$$
$$' \quad \to \{ \quad ''\},$$
$$(\ \cup \ ') \to \{ \quad ' \quad '' \quad ' \cup \ ''\}$$

ისეთი ასახვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

) $(\ ) =$ ყოველი $\in \ \cap \ '-$თვის;

) $(\ ) \in \{ \quad '\}$, ყოველი $\in \quad '-$თვის და $_{\alpha}(\ ) = \ '$ რომელიღაც $\in \quad '-$თვის;

) $(\ ) \in \{ \quad ''\}$, ყოველი $\in \ '$ - თვის და $_{\alpha}(\ ) = \ ''$ რომელიღაც $\in \ '$ თვის;

) $(\ ) \in \{ \quad ' \quad '' \quad ' \cup \ ''\}$, ყოველი $\in \quad (\ \cup \ ')-$თვის.

ახლა განვმარტოთ $\quad \to \quad$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t)=\begin{cases} f_0(t),\ if\ \ t\in Y_1\cap Y_1', \\ f_1(t),\ if\ \ t\in Y_1\setminus Y_1', \\ f_2(t),\ if\ \ t\in Y_1'\setminus Y_1, \\ f_3(t),\ if\ \ t\in X\setminus(Y_1\cup Y_1'). \end{cases}$$

მას შევუსაბამოთ ( ) ნახევარჯგუფის ბინარული $\beta=\bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ მიმართება.

ახლა თუ

$$Y_T^{\beta}=\{t\mid t\beta=T\},$$

$$Y_{T'}^{\beta}=\{t\mid t\beta=T'\},$$

$$Y_{T''}^{\beta}=\{t\mid t\beta=T''\},$$

$$Y_{T'\cup T''}^{\beta}=\{t\mid t\beta=T'\cup T''\},$$

მაშინ β მიმართება ჩაიწერება სახით

$$\beta=\left(Y_T^{\beta}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\beta}\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^{\beta}\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^{\beta}\times(T'\cup T'')\right)$$

და იგი დააკმაყოფილებს პირობებს

$$\begin{aligned} &Y_T^{\beta}\cup Y_{T'}^{\beta}\supseteq Y_1, \\ &Y_T^{\beta}\cup Y_{T''}^{\beta}\supseteq Y_1', \\ &Y_{T'}^{\beta}\cap Y\neq\varnothing, \\ &Y_{T''}^{\beta}\cap Y'\neq\varnothing. \end{aligned}$$

(მოცემულობის თანახმად ( ) = ′ რომელიღაც ∈ ′ – სათვის და ( ) = ″ რომელიღაც ∈ ′ - თვის). ამიტომაც ლემა 3.2.12 - ის თანახმად $\beta\in R(D')\cap R(D'')$.

მივიღეთ, რომ α ბინარულ მიმართებებს, აღებულს $R(D')\cap R(D'')$ სიმრავლიდან და ასახვათა $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სისტემებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა.

ასახვათა სისტემის რაოდენობა 3.0.6 თეორემის თანახმად ტოლია

, |(′) (′)| ⋅ (| | –), |(′) (′)| ⋅ (| ′ | –), | (∪ ′)|

შევნიშნოთ, რომ | (∪ ′)| ⋅ (| | –) ⋅ | ′(′∪)| ⋅ (| ′ | –) ⋅ | (∪ ′)| რიცხვი არ არის დამოკიდებული მე-5 პუნქტით განსაზღვრული $\{T,T',T'',T'\cup T''\}$ ნახევარმესერის შერჩევაზე, და რადგან ამ ტიპის განსხვავებულ ნახევარმესერთა რაოდენობა 4-ის ტოლია, ამიტომ

$$\left|R(D')\cap R(D'')\right|=4\cdot 2^{\left|Y_1\setminus(Y\cup Y_1')\right|}\cdot\left(2^{\left|Y\setminus Y_1'\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Y_1'\setminus(Y'\cup Y_1)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus Y_1\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus(Y_1\cup Y_1')\right|}.$$

აქედან მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\left|\ \left(\ '\right)\cap\ \left(\ ''\right)\right|= \ \cdot\ |\quad|\cdot\left(|\quad|-\ \right)\cdot\left(|\quad|-\ \right)\cdot\ |\quad\breve{}|\\
&\left|\ \left(\ '\right)\cap\ \left(\ '\right)\right|= \ \cdot\left(|\quad|-\ \right)\cdot\ |\quad|\cdot\left(|\quad|-\ \right)\cdot\ |\quad\breve{}|\\
&\left|\ \left(\ '\right)\cap\ \left(\ '\right)\right|= \ \cdot\left(|\quad|-\ \right)\cdot\left(|\quad|-\ \right)\cdot\ |\quad\breve{}|\\
&\left|\ \left(\ '\right)\cap\ \left(\ '\right)\right|= \ \cdot\left(|\quad|-\ \right)\cdot\left(|\quad|-\ \right)\cdot\ |\quad\breve{}|
\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.14. ვთქვათ

$$D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right).$$

თუ   სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_5\right)\right| = 8\cdot&\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\\
+8\cdot&\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
+8\cdot&\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\
-8\cdot&\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\
-8\cdot&\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.
\end{aligned}$$

დამტკიცება. 3.2.11 და 3.2.13 ლემების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_5\right)\right| &= \left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|+\left|R\left(D_5'\right)\right|+\left|R\left(D_6'\right)\right|-\\
&-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|-\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|-\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right|=\\
&=8\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\\
&+8\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+8\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\
&-8\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\
&-8\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.
\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია

6) გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$Q_6\theta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

ახლა თუ $D_1'=\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}$, მაშინ

$$R^*\left(Q_6\right)=R\left(D_1'\right)$$

და $$\left|R^*\left(Q_6\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|.$$

ლემა 3.2.15. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right)$. თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*\left(Q_6\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

დამტკიცება. ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს

$$\left|R^*\left(Q_6\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

ლემა დამტკიცებულია.

7) გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$Q_7\theta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

ახლა თუ $D_1'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, მაშინ

$$R^*\left(Q_7\right)=R\left(D_1'\right)$$

და

$$\left|R^*\left(Q_7\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|.$$

ლემა 3.2.16. ვთქვათ

$$D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4\left(X,8\right).$$

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*\left(Q_7\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

დამტკიცება. ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს

$$\left|R^*\left(Q_7\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

ლემა დამტკიცებულია

8) გაერთიანებათა D ნახევარმესერის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$Q_8\theta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

ახლა თუ $D_1'=\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, მაშინ

$$R^*(Q_8)=R(D_1')$$

და

$$\left|R^*(Q_8)\right|=\left|R(D_1')\right|.$$

ლემა 3.2.17. ვთქვათ

$$D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8).$$

თუ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*(Q_8)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

დამტკიცება. ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს

$$\left|R^*(Q_8)\right|=\left|R(D_1')\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_1|}-2^{|Z_3\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2.1. ვთქვათ

$$D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8).$$

თუ სასრული სიმრავლეა და არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე, მაშინ

$$|R_D|=|R^*(Q_1)|+|R^*(Q_2)|+|R^*(Q_3)|+|R^*(Q_4)|+|R^*(Q_5)|+|R^*(Q_6)|+|R^*(Q_7)|+|R^*(Q_8)|.$$

დამტკიცება. მოცემული თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 3.1.1-დან.

მაგალითი 3.2.1. ვთქვათ $=\{\qquad\}=\breve{}$ და

$$
\begin{aligned}
&P_1=\{1\},\ P_2=\{2\},\\
&P_3=\{3\},\ P_4=\{4\},\\
&P_5=\{5\},\\
&P_0=P_6=P_7=\varnothing
\end{aligned}
.
$$

მაშინ

$$\breve{D}=\{1,2,3,4,5\},$$

$$Z_1=\{2,3,4,5\},$$

$$Z_2=\{1,3,4,5\},$$

$$Z_3=\{1,2,4,5\},$$

$$Z_4=\{2,3,5\},$$

$$Z_5=\{2,3,4\},$$

$$Z_6=\{2,4,5\},$$

$$Z_7=\{2,5\}$$

და

$$D=\{\{2,5\},\{2,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$|R^*(Q_1)|=8,\ |R^*(Q_2)|=150,$$

$$|R^*(Q_3)|=121,\ |R^*(Q_4)|=9,$$

$$|R^*(Q_5)|=40,\ |R^*(Q_6)|=2,$$

$$|R^*(Q_7)|=2,\ |R^*(Q_8)|=1,$$

ე.ი.

$$|R_D|=333.$$

მაგალითი 3.2.2. ვთქვათ $=\{\qquad\}=\breve{}$ და

$$
\begin{aligned}
&P_0=\{8\},\ P_1=\{1\},\\
&P_2=\{2\},\ P_3=\{3\},\\
&P_4=\{4\},\ P_5=\{5\},\\
&P_6=\{6\},\ P_7=\{7\}
\end{aligned}
.
$$

მაშინ

$$\breve{\ } = \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \}$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \}$$

და

$$D = \{\{2,5,8\},\{2,4,5,7,8\},\ \{2,3,4,6,7,8\},\{2,3,5,6,7,8\},$$
$$\{1,2,4,5,6,7,8\},\{1,3,4,5,6,7,8\},\ \{2,3,4,5,6,7,8\},\ \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება:

$|R^*(Q_1)|=8$, $\left|R^*(Q_2)\right|=510$, $\left|R^*(Q_3)\right|=935$, $\left|R^*(Q_4)\right|=111$, $\left|R^*(Q_5)\right|=104$, $\left|R^*(Q_6)\right|=6$, $\left|R^*(Q_7)\right|=12$ $\left|R^*(Q_8)\right|=1$ ე.ი. $|R_D|=1687$.

3.3 $\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული სრული ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების ზოგიერთი თვისებები

მოცემულ ნაშრომში ვამტკიცებთ, რომ $\Sigma_4(X,8)$ კლასის D გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ სრული ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების R_D სიმრავლე წამოადგენს ამ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფს.

$\Sigma_4(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფებისთვის ქვემოთ მოცემული მტკიცება კარგად არის ცნობილი (იხ [7, 8]).

ლემა 3.3.1. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_4(X,8)$.

მაშინ D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერებს ამოწურავენ შემდეგი სიმრავლეები:

1) $\{Z_7\},\{Z_6\},\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის 1 დიაგრამა);

2) $\{Z_7,Z_6\},\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_3\},$
$\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3\},$
$\{Z_6,Z_1\},\{Z_6,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1\},$
$\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},$
$\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}.$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-2 დიაგრამა);

3) $\{Z_7,Z_6,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,\breve{D}\},$
$\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3\},$
$\{Z_7,Z_6,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_3,\breve{D}\},$
$\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-3 დიაგრამა);

4) $\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-4 დიაგრამა);

5) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},$
$\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-5 დიაგრამა);

6) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის 6 დიაგრამა);

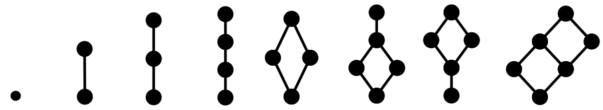
7) $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-7 დიაგრამა);

8) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$

(იხ. 3.3.1 ნახაზის მე-8 დიაგრამა);

D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერების დიაგრამები გამოსახულია ნახ. 3.3.1-ში .



7

ნახ. 3.3.1

განმარტება 3.3.1. ვთქვათ, D არის რომელიღაც გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერი, $\alpha \in B_X(D)$ და $Y_T^{\alpha} = \{x \in X \mid x\alpha = T\}$. თუ

$V[\alpha] = V(X^*, \alpha)$, როცა $\varnothing \notin D$,

$V[\alpha] = V(X^*, \alpha)$, როცა $\varnothing \in V(X^*, \alpha)$,

$V[\alpha] = V(X^*, \alpha) \cup \{\varnothing\}$, როცა $\varnothing \notin V(X^*, \alpha)$ და $\varnothing \in D$,

მაშინ ცხადია, ყოველთვის შესაძლებელია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების წარმოდგენა შემდეგი სახით:

$$\alpha = \bigcup_{T \in V[\alpha]} \left(Y_T^{\alpha} \times T\right).$$

შემდეგში α ბინარული მიმართების ასეთ წარმოდგენას ვუწოდებთ კვაზინორმალურ წარმოდგენას .

შევნიშნოთ, რომ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენი-სათვის Y_T^{α} სიმრავლეები შეიძლება ყველა არ განსხვავდებოდნენ ცარიელი სიმრავ-ლისაგან, მაგრამ ასეთი წარმოდგენისათვის ყოველთვის სრულდება შემდეგი პირობა:

a) $Y_T^{\alpha} \cap Y_{T'}^{\alpha} = \varnothing$ ნებისმიერი $T, T' \in D$-თვის, $T \neq T'$;

b) $X = \bigcup_{T \in V[\alpha]} Y_T^{\alpha}$

(იხ [1], 1.11).

თეორემა 3.3.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$.

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, წარმოდგენილი ქვემოთ მოცემული კვაზინორმალური ფორმებიდან ერთ-ერთი სახით, არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, თუ არსებობს სრული φ $\alpha-$ იზომორფიზმი $V(D, \alpha)$ ნახევარმესერიდან D ნახევარმესერის რომელიღაც D'

ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

a) $\alpha = X \times T,$

რომელიღაც $T \in D$ ელემენტისათვის;

b) $\alpha = \left(Y_T^{\alpha} \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^{\alpha} \times T'\right),$

რომელიღაც
$$\begin{aligned} & T, T' \in D, \\ & T \subset T', \\ & Y_T^{\alpha}, Y_{T'}^{\alpha} \notin \{\varnothing\}, \\ & Y_T^{\alpha} \supseteq \varphi(T), \\ & Y_{T'}^{\alpha} \cap \varphi(T') \neq \varnothing; \end{aligned}$$

ელემენტებისათვის;

c) $\alpha = \left(Y_T^{\alpha} \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^{\alpha} \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^{\alpha} \times T''\right),$

რომელიღაც
$$\begin{aligned} & T, T', T'' \in D, T \subset T' \subset T'', \\ & Y_T^{\alpha}, Y_{T'}^{\alpha}, Y_{T''}^{\alpha}, \notin \{\varnothing\}, \\ & Y_T^{\alpha} \supseteq \varphi(T), \\ & Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq \varphi(T'), \\ & Y_{T'}^{\alpha} \cap \varphi(T') \neq \varnothing, \\ & Y_{T''}^{\alpha} \cap \varphi(T'') \neq \varnothing; \end{aligned}$$

ელემენტებისათვის;

d) $\alpha = \left(Y_7^{\alpha} \times Z_7\right) \cup \left(Y_T^{\alpha} \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^{\alpha} \times T'\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right),$

რომელიღაც
$$\begin{aligned} & T, T', Z \in D, \\ & Z_7 \subset T \subset T' \subset \breve{D}, \\ & Y_7^{\alpha}, Y_T^{\alpha}, Y_{T'}^{\alpha}, Y_0^{\alpha} \notin \{\varnothing\}, \\ & Y_7^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_7), \\ & Y_7^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \supseteq \varphi(T), \\ & Y_7^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq \varphi(T'), \\ & Y_T^{\alpha} \cap \varphi(T) \neq \varnothing, \\ & Y_{T'}^{\alpha} \cap \varphi(T') \neq \varnothing, \\ & Y_0^{\alpha} \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing, \end{aligned}$$

ელემენტებისათვის;

e) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{T' \cup Z}^\alpha \times \left(T' \cup Z\right)\right)$

რომელიღაც
$$\begin{aligned}
&T, T', Z \in D,\\
&T \subset T',\\
&T \subset Z,\\
&T' \setminus Z \neq \varnothing,\\
&Z \setminus T' \neq \varnothing,\\
&Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\},\\
&Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T'),\\
&Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z),\\
&Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing,\\
&Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing;
\end{aligned}$$

ელემენტებისათვის;

f) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$

რომელიღაც
$$\begin{aligned}
&Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\},\\
&Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6),\\
&Y_7^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4),\\
&Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing,\\
&Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing,\\
&Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing;
\end{aligned}$$

ელემენტებისათვის;

g) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$

რომელიღაც
$$\begin{aligned}
&Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\},\\
&Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6),\\
&Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3),\\
&Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1),\\
&Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing,\\
&Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing,\\
&Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing;
\end{aligned}$$

ელემენტებისათვის;

) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right),$

რომელიღაც
$$\begin{aligned}
&Y_7^{\alpha}, Y_6^{\alpha}, Y_4^{\alpha}, Y_3^{\alpha} \notin \{\varnothing\},\\
&Y_7^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_7),\\
&Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_6),\\
&Y_7^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_4),\\
&Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_3),\\
&Y_6^{\alpha} \cap \varphi(Z_6) \neq \varnothing,\\
&Y_4^{\alpha} \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing,\\
&Y_3^{\alpha} \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing;
\end{aligned}$$

ელემენტებისათვის.

თეორემა 3.3.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_4(X, 8)$.

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარულ ელემენტთა R_D სიმრავლე წარმოადგენს ამ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფს.

დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha, \beta \in B_X(D)$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგანს აქვს შემდები სახე:

$$\alpha = (Y_7^{\alpha} \times Z_7) \cup (Y_6^{\alpha} \times Z_6) \cup (Y_5^{\alpha} \times Z_5) \cup (Y_4^{\alpha} \times Z_4) \cup (Y_3^{\alpha} \times Z_3) \cup (Y_2^{\alpha} \times Z_2) \cup (Y_1^{\alpha} \times Z_1) \cup (Y_0^{\alpha} \times \breve{D}), \quad \text{...(3.3.2)}$$

ასევე გვაქვს:

$$V(D, \alpha \circ \beta) \subseteq V(D, \beta) \quad \text{...(3.3.3)}$$

და

$$\begin{aligned}
\alpha \circ \beta = &(Y_7^{\alpha} \times Z_7\beta) \cup (Y_6^{\alpha} \times Z_6\beta) \cup\\
&\cup (Y_5^{\alpha} \times Z_5\beta) \cup (Y_4^{\alpha} \times Z_4\beta) \cup\\
&\cup (Y_3^{\alpha} \times Z_3\beta) \cup (Y_2^{\alpha} \times Z_2\beta) \cup\\
&\cup (Y_1^{\alpha} \times Z_1\beta) \cup (Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\beta).
\end{aligned} \quad \text{...(3.3.4)}$$

აქედან გამომდინარეობს:

$$V(D, \alpha \circ \beta) = \{Z_7\beta,\ Z_6\beta,\ Z_5\beta,\ Z_4\beta,\ Z_3\beta,\ Z_2\beta,\ Z_1\beta,\ \breve{D}\beta\}. \quad \text{... (3.3.5)}$$

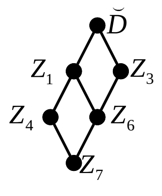
შევნიშნოთ, რომ ასახვა $\varphi_{\alpha\beta} : V(D, \alpha) \to V(D, \alpha \circ \beta)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\varphi_{\alpha\beta}(Z) = Z\beta$ ნებისმიერი Z ელემენტისთვის აღებული $V(D, \alpha)$ სიმრავ-ლიდან, წარმოადგენს მონოტონურ ასახვას $V(D, \alpha)$ ნახევარმესერიდან $V(D, \alpha \circ \beta)$ ნახევარმესერზე. ე.ი., $\varphi_{\alpha\beta}$ ასახვა $Z \subseteq Z'$ პირობისთვის ყოველთვის გულისხმობს

$Z\beta \subseteq Z'\beta$ ყოველი $Z, Z' \in V(D,\alpha)$. (3.3.3) ჩართვიდან გვაქვს, რომ $\varphi_{\alpha\beta}$ ასახვა არის მონოტონური ასახვა $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერიდან $V(D,\beta)$ ნახევარმესერში, ე.ი., თუ $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერი სასრულია და ცნობილია მისი დიაგრამა, მაშინ $V(D,\beta)$ ნახევარმესერის დიგრამა წარმოადგენს $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამაში ქვედიაგრამას.

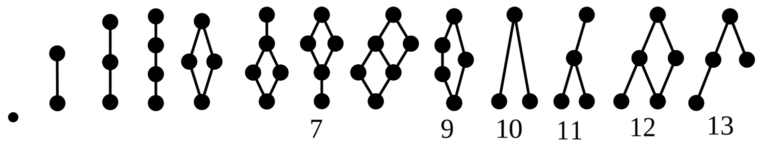
ახლა ვთქვათ α და β იყოს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი რეგულარული ელემენტები. მაშინ თეორემა 3.3.1-ის თანახმად $V(D,\alpha)$ და $V(D,\beta)$ $XI-$ ნახევარმესერები არიან D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერები, რომელთა დიაგრამები მოცემულია ნახ. 3.3.1-ზე. ამ დიაგრამებიდან ჩანს, რომ $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერს გააჩნია უმცირესი ელემენტი. (3.3.3) და (3.3.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერს ასევე გააჩნია უმცირესი ელემენტი. ეს ფაქტი კი უკვე იმას ნიშნავს, რომ $\varphi_{\alpha\beta}$ ასახვა არის მონოტონური ასახვა $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერიდან $V(D,\beta)$ ნახევარმესერში.

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

1) ნახ.3.3.1-ზე მე-8 დიაგრამა არის $V(D,\beta)$ ნახევარმესერის. D ნახევარმესერის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ გვაქვს ამ ნახევარმესერის ერთადერთი $D' = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$ ქვენახევარმესერი, რომლის დიაგრამა არის ნახ. 3.3.1-ზე მე-8 დიაგრამა (იხ. ნახ. 3.3.2). მოცემული ნახევარმესერის ნებისმიერი ქვენახევარმესერის დიაგრამა მოცემულია ნახ. 3.3.3-ზე.



ნახ. 3.3.2



ნახ. 3.3.3

დაშვების თანახმად გვაქვს, რომ $V(D,\alpha\circ\beta)\subseteq V(D,\beta)$. ასეთ შემთხვევაში $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამა შეიძლება იყოს ნახ. 3.3.3-ზე მოცემული დიაგრამებიდან ერთ-ერთი. მაშინ თეორემა 3.3.1-ის თანახმად $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარ-მესერი შეიცავს უმცირეს ელემენტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამა შეიძლება იყოს ნახ. 3.3.3-ზე მოცემული 1-9 დაგრამებიდან ერთ-ერთი.

ვაჩვენოთ, რომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამა ყოველთვის განსხვავდება ნახ. 3.3.3-ის მე-9 დიაგრამისგან. მართლაც, მე-9 დიაგრამა წარმოადგენს მე-3 დიაგრამის ქვედიაგრამას. ამიტომ, D ნახევარმესერის განმარტებიდან გამომდინარე სრულდება ტოლობა:

$$V(D,\alpha)=\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\} \text{ და}$$

$$V(D,\alpha\circ\beta)=\left\{Z_7\beta,Z_6\beta,Z_4\beta,Z_3\beta,Z_1\beta,\breve{D}\beta\right\}\subseteq V(D,\beta).$$

დავუშვათ, რომ არსებობს რაღაც β რეგულარული ელემენტი, რომლისთვისაც $Z\beta=Z'\beta$ ნებისმიერი $Z\beta,Z'\beta\in V(D,\alpha\circ\beta)$ და სხვა ხუთი ელემენტი არის X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები.

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

a) $Z,Z',Z''\in D$, $Z\subset Z'\subset Z''$, $Z\beta,Z'\beta,Z''\beta\in V(D,\alpha\circ\beta)$ და $Z\beta=Z''\beta$.

მაშინ

$$Z\beta=Z'\beta=Z''\beta,$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\left|V(D,\alpha\circ\beta)\right|\le 4.$$

მიღებული $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$ უტოლობა ეწინააღმდეგება ტოლობას $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|=5$. ამრიგად გვაქვს

$$Z_7\beta\ne Z_3\beta,\ Z_7\beta\ne Z_1\beta,\ Z_6\beta\ne \breve{D}\beta,\ Z_4\beta\ne \breve{D}\beta.$$

b) $Z_7\beta=Z_6\beta$. D ნახევარმესერის განმარტებიდან გვექნება $Z_6\cup Z_4=Z_1$ და $Z_4\supset Z_7$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$Z_6\beta\cup Z_4\beta=Z_1\beta,$$

$$Z_1\beta=Z_6\beta\cup Z_4\beta=Z_4\beta .$$

საიდანაც, $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$. უტოლობა $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$ კი ეწინააღმდეგება $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|=5$ ტოლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $Z_7\beta\ne Z_6\beta$.

c) $Z_7\beta=Z_4\beta$. D ნახევარმესერის განმარტებიდან გვექნება $Z_6\cup Z_4=Z_1$ და $Z_6\supset Z_7$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება, რომ

$$Z_6\beta\cup Z_4\beta=Z_1\beta,\ Z_6\beta\supseteq Z_7\beta=Z_4\beta,$$

$$Z_1\beta=Z_6\beta\cup Z_4\beta=Z_6\beta .$$

საიდანაც, $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$. უტოლობა $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$ კი ეწინააღმდეგება $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|=5$ ტოლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $Z_7\beta\ne Z_4\beta$.

d) $Z_6\beta=Z_1\beta$. D ნახევარმესერის განმარტებიდან გვექნება $Z_1\cup Z_3=\breve{D}$ და $Z_3\supset Z_6$, ასეთ შემთხვევაში გვექნება, რომ

$$Z_1\beta\cup Z_3\beta=\breve{D}\beta,\ Z_3\beta\supseteq Z_6\beta,$$

$$Z_3\beta=\breve{D}\beta .$$

საიდანაც, $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$. უტოლობა $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$ კი ეწინააღმდეგება $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|=5$ ტოლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $Z_6\beta\ne Z_1\beta$.

e) $Z_6\beta=Z_3\beta$. D ნახევარმესერის განმარტებიდან გვექნება $Z_1\cup Z_3=\breve{D}$ და $Z_1\supset Z_6$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება, რომ

$$Z_1\beta\cup Z_3\beta=\breve{D}\beta,\ Z_1\beta\supseteq Z_6\beta \text{ და } Z_1\beta=\breve{D}\beta .$$

ამრიგად, $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$. უტოლობა $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|\le 4$ კი ეწინააღმდეგება $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right|=5$ ტოლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $Z_6\beta\ne Z_3\beta$.

f) $Z_4\beta=Z_1\beta$. რადგანაც $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის ხუთი ელემენტი არის X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლე, ამიტომ სამართლიანი იქნება შემდეგი ჩართვები:

$$Z_7\beta\subset Z_6\beta\subset Z_1\beta\subset \breve{D}\beta,$$
$$Z_7\beta\subset Z_6\beta\subset Z_3\beta\subset \breve{D}\beta\quad,$$

ე.ი., $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამა არის ჯაჭვი, თუ $Z_1\beta$ და $Z_3\beta$ ელემენტები ურთიერთ დაკავშირებული არიან თეორიულ-სიმრავლური ჩართვით ან $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამას აქვს ნახ.3.3.3-ზე მე-7 სახე, თუ $Z_3\beta\setminus Z_1\beta\ne\varnothing$ და $Z_1\beta\setminus Z_3\beta\ne\varnothing$. ეს ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას, რომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარ-მესერის დიაგრამას აქვს ნახ. 3.3.3-ზე მე-9 სახე. ამრიგად მივიღებთ: $Z_4\beta\ne Z_1\beta$.

g) $Z_3\beta=\breve{D}\beta$ ან $Z_1\beta=\breve{D}\beta$. რადგანაც $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის ხუთი ელემენტი არის X სიმრავლის წყვილ-წყვილად განსხვავებული ქვესიმრავლე, გვექნება:

$$Z_7\beta\subset Z_6\beta\subset Z_1\beta\subset \breve{D}\beta,$$
$$Z_7\beta\subset Z_4\beta\subset Z_1\beta\subset \breve{D}\beta$$

ან

$$Z_7\beta\subset Z_6\beta\subset Z_3\beta\subset \breve{D}\beta,$$
$$Z_7\beta\subset Z_4\beta\subset Z_3\beta\subset \breve{D}\beta\quad.$$

ე.ი., $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამა არის ჯაჭვი, თუ $Z_4\beta$ და $Z_6\beta$ ელემენტები ურთიერთ დაკავშირებული არიან თეორიულ-სიმრავლური ჩართვით ან $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამას აქვს ნახ. 3.3.3-ზე მე-6 სახე, თუ $Z_6\beta\setminus Z_4\beta\ne\varnothing$ და $Z_4\beta\setminus Z_6\beta\ne\varnothing$. ეს ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას, რომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამას აქვს ნახ. 3.3.3-ზე მე-9 სახე. მაშასადამე მივიღებთ: $Z_3\beta\ne\breve{D}\beta$ და $Z_1\beta\ne\breve{D}\beta$.

h) $Z_6\beta=Z_4\beta$ ან $Z_4\beta=Z_3\beta$ ან $Z_3\beta=Z_1\beta$. D ნახევარმესერის განმარტებიდან გვექნება $Z_6\cup Z_4=Z_1$, $Z_4\cup Z_3=Z_3\cup Z_1=\breve{D}$.

ამ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$Z_6\beta\cup Z_4\beta=Z_1\beta$$

და

$$Z_4\beta \cup Z_3\beta = Z_3\beta \cup Z_1\beta = \breve{D}\beta \ .$$

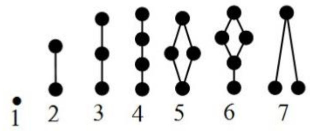
აქედან და ასევე ჩვენი დაშვებიდან გამომდინარეობს

$$Z_6\beta = Z_4\beta = Z_1\beta \ ,$$
$$Z_4\beta = Z_3\beta = \breve{D}\beta \ ,$$
$$Z_3\beta = Z_1\beta = \breve{D}\beta \ .$$

მივიღეთ: $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right| \le 4$. ეს კი ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას, რომ $\left|V\left(D,\alpha\circ\beta\right)\right| = 5$. ასე, რომ $Z_6\beta \ne Z_4\beta$ და $Z_4\beta \ne Z_3\beta$ და $Z_3\beta \ne Z_1\beta$.

$a)-h)$ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგ-რამას არასდროს არ ექნება ნახ. 3.3.3-ზე მე-9 სახე. ასეთ შემთხვევაში $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამა შეიძლება იყოს ნახ. 3.3.3-ზე 1-8- დან ერთ-ერთი. თეორემა 2.0.3, 2.0.4 და 2.0.5-ის თანახმად ისინი არიან გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერები, ამიტომ თეორემა 3.0.7-ის თანახმად $\alpha\circ\beta$ ბინარული მიმართება არის $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი.

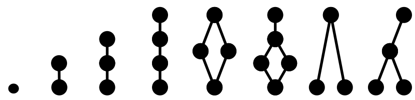
2) თუ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამას აქვს ნახ. 3.3.1-ზე მე-7 სახე, მაშინ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის ნებისმიერი ქვენახევარმესერის დიაგრამას შეიძლება ჰქონდეს ნახ. 3.3.4-ში 1-7 დიაგრამებიდან ერთ-ერთი სახე.



ნახ.2.3.4

რადგან $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერს გააჩნია უმცირესი ელემენტი, ამიტომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამას შეიძლება ქონდეს ნახ. 3.3.4-ზე 1-6 დიაგრამებიდან ერთ-ერთი სახე. თეორემა 2.0.3 და 2.0.4-ის ძალით, ისინი არიან გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერები. ამიტომ, თეორემა 3.0.7-ის თანახმად $\alpha\circ\beta$ ბინარული მიმართება არის $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი.

3) $V\left(D,\alpha\circ\beta\right)$ ნახევარმესერის დიაგრამას აქვს ნახ. 3.3.1-ზე მე-6 სახე, მაშინ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის ნებისმიერი ქვენახევარმესერის დიაგრამას შეიძლება ჰქონდეს ნახ. 3.3.1-ში 1-8 დიაგრამებიდან ერთ-ერთი სახე.

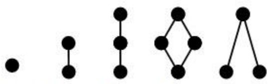


7

ნახ.2.3.5

რადგან $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერს გააჩნია უმცირესი ელემენტი, ამიტომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამას შეიძლება ქონდეს ნახ. 3.3.5-ზე 1-6 დიაგ-რამებიდან ერთ-ერთი სახე. თეორემა 2.1.3 და 2.1.4ის ძალით, ისინი არიან გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერები. ამიტომ, თეორემა 3.0.7-ის თანახმად $\alpha\circ\beta$ ბინარული მიმართება არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი.

4) $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამას აქვს ნახ. 3.3.1-ზე მე-6 სახე. მაშინ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის ნებისმიერი ქვენახევარმესერის დიაგრამას შეიძლება ქონდეს ნახ. 3.3.1-ზე 1-5 დიაგრამებიდან ერთ-ერთი სახე.



1 2 3 4 5

ნახ. 2.3.7

რადგან $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერს გააჩნია უმცირესი ელემენტი, ამიტომ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამას შეიძლება ქონდეს ნახ. 3.3.6-ზე 1-4 დიაგრამებიდან ერთ-ერთი სახე. თეორემა 2.1.3 და 2.1.4-ის ძალით, ისინი არიან გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერები. ამიტომ, თეორემა 3.0.7-ის თანახმად $\alpha\circ\beta$ ბინარული მიმართება არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი.

5) $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის დიაგრამა არის ნახ. 3.3.1-ზე მოცემული $1-4$ დაგრამებიდან ერთ-ერთი. მაშინ $V(D,\alpha\circ\beta)$ ნახევარმესერის ნებისმიერი ქვენახე-ვარმესერის დიაგრამა წარმოადგენს სრულ ჯაჭვს. თეორემა 2.0.3-დან გამონდი-ნარეობს, რომ ისინი წარმოადგენენ გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერებს. ამიტომ, თეორემა 3.0.7-ის თანახმად $\alpha\circ\beta$ ბინარული მიმართება არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა

1. Avaliani Z., Complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 2, 2001, $223-224$.
2. Avaliani Z., The idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 3, 2001, $440-442$.
3. Avaliani Z., Regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattice of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 2, 2002, $254-255$.
4. Avaliani Z., The number of regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, $472-473$.
5. Avaliani Z., Maximal subgroups of a class of semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 103.
6. Avaliani Z., Sh. Makharadze, Maximal subgroups of some classes of semigroups of binary relations. Georgian Math J., 11, no. 2, 2004, 203-207.
7. Avaliani Z., Formulas for Calculation of Regular Elements of the Semigroups $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_1(X,5)$. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 211, Issue 1, November 2015, pp. 3-12.
8. Clifford A., Preston G., Algebraic theory of semigroups. Mir, Moscow, 1972 (traslated from English).
9. Clifford A.H., Union and symmetry preserving endomorphisms of the semigroup of all binary relations on a set. Czechoslovak Math. J., 20, no.95, 1970, $303-314$.
10. DevadzeKh. M., Generating sets of some subsemigroups of the semigroup of all binary relations in a finite set. Proc. A.I. Hertzen Leningrad State Polytechn.Inst., 387, 1968, $92-100$ (in Russian).
11. DevadzeKh.M., A semigroup generated by the set of all equivalence relations in a finite set. XIth All-Union Algebraic Colloquium, Abstracts of Reports, 1971, Kishinev. $193-194$ (in Russian).
12. DevadezKh.M., Generating sets of the semigroup of all binary relations in a finite set. DokladyAN BSSR, 12, no. 9, 1968, $765-768$ (in Russian).
13. DiasamidzeYa.I., On idempotent binary relations. XIIth All-Union Algebraic Colloquium, Sverdlovsk, part II, 1973 (in Russian).
14. DiasamidzeYa.I., Some semigroups generated by idempotent binary relations. In the collection: Sovremennaya Algebra, no.3, 1975, Leningrad, $36-51$ (in Russian).
15. DiasamidzeYa.I., Green relations on the semigroup generated by all diagonal idempotent relations. All-Union Algebraic Symposium, Gomel, part I, 1975 (in Russian).

16. DiasamidzeYa.I. On the semigroup of binary relations. In the collection: Gertsenovsk. Chteniya, Matematika, 1976, Leningrad, $5-8$ (in Russian).
17. DiasamidzeYa.I., Green relations on the semigroup generated by all almost diagonal idempotent relations. In the collection of works: Sovrem Algebra, no. 4, 1976, Leningrad, $57-65$.
18. DiasamidzeYa.I., Description of all minimal left (right) idempotent divisors of almost diagonal relations. In the collection: Sovrem. Algebra, no. 5, 1976, Leningrad, $40-46$ (in Russian).
19. DiasamidzeYa.I., On reducible and irreducible binary relations. Xth Conf. Mathem. Higher Educat. Establishments Georgian SSR, Abstracts of Reports, Telavi, 1983 (in Russian).
20. DiasamidzeYa.I., Construction of idempotent binary relations. 45th Scientific Conference. Abstracts of Reports, Batumi, 1988 (in Russian).
21. DiasamidzeYa.I., On unilateral zeros of subsets of the semigroup of binary relations. Ukrainian Math. J., 42, no. 5, 1990, $600-604$ (in Russian).
22. DiasamidzeYa.I., On unilateral units of subsets of the semigroup of binary relations. Ukrainian Math. J., 42, no. 8, 1990, 1026-1031 (in Russian).
23. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., Irreducible generating sets of some idempotently generated subsemigroups of the semigroup of all binary relations. Batumi, 1996, $1-31$ (in Russian).
24. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., Right zeros of complete semigroups of binary relations. Proc. Shota Rustaveli Batumi State Univ., no. 2, Batumi, 1998, $39-42$.
25. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., A general characterization of semigroups the class $\Sigma(X,2)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 2, 1999, $198-200$.
26. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., Right zeros of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 3, 1999, $376-378$.
27. DiasamidzeYa.I., Complete semigroups of binary relations. Ajara Publ. House, Batumi, 2000, $1-176$ (in Russian).
28. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., DiasamidzeI.Ya., Complete semigroups of binary relations defined by nodal $X-$semilattices of unions. Proc. Shota Rustaveli Batumi State Univ., Batumi, 2001, $28-49$.
29. DiasamidzeYa., Divisibility of elements in complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 2, 2001, $225-227$.
30. DiasamidzeYa., Right units and idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 3, 2001, $443-446$.
31. DiasamidzeYa., Maximal submonoids and maximal subgroups of complete semigroups of binary relations. Proc. IIIrd Congress of Mathematicians of Georgia, Tbilisi, 2001.
32. DiasamidzeYa., Complete semigroups of binary relations with unique right units. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 1, 2001, $18-21$.

33. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., Complete semigroups of binary relations defined by elementary and nodal $X-$semilattices of unions. ItogiNauki I Tekjniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, Algebra, 81, no. 19, 2001 (in Russian).
34. DiasamidzeYa., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete $X-$semilattices generated by sets of nonchainwise pairs. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, $477-479$.
35. DiasamidzeYa., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete $X-$semilattices generated by sets of pairwise nonintersecting sets. Bull. Georgian Acad, Sci., 166, no. 1, 2002, $23-26$.
36. DiasamidzeYa., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete $X-$semilattices generated by chains. Bull, Georgian Acad. Sci., 166, no. 2, 2002.
37. DiasamidzeYa., To the theory of semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 128, 2002, $1-15$.
38. DiasamidzeYa., Right units in the semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 128, 2002, $17-36$.
39. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., Complete semigroups of binary rekations defined by elementary and nodal $X-$semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, 111, no.1, 2002, Plenum Publ. Corp., New York, $3171-3226$.
40. DiasamidzeYa.I., Sirabidze T., Complete semigroups of binary relations defined by three-element $X-$chains. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematic Surveys, 98, 2002 (in Russian).
41. DiasamidzeYa.I., Complete semigroups of binary relations. ItogiNauki I Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Apllications. Thematic Surveys, 98, 2002 (in Russian).
42. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., Semigroups $B_X(D)$ defined by finite $X-$chains. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $107-108$.
43. DiasamidzeYa.I., Irreducible elements of the semigroup. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $109-110$.
44. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., Maximal subgroups of complete semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $21-38$.
45. DiasamidzeYa.I., Sirabidze T., Complete semigroups of binary relations defined by three-element $X-$chains. Journal of Mathematical Sciences, 117, no. 4, 2003, Plenum Publ. Corp., New York, 2003, $4320-4350$.
46. DiasamidzeYa., Complete semigroups of binary relations. Journal of Mathematical Sciences, 117, no. 4, 2003, Plenum Publ. Corp., New York, $4271-4319$.
47. DiasamidzeYa.I., Diasamidze I., Complete semigroups of binary relations defined by finite $X-$chains. Proc. Batumi State Univ., no. 4, 2003, $3-36$.

48. Diasamidze Il., Semigroups $B_X(D)$ defined by finite $X-$chains. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $105-106$.
49. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite $X-$semilattices of unions. Bull. Georgian Acad. Sci., 169, no. 2, 2004, $263-266$.
50. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., Description of the class $\Sigma(\quad)$ (m is a finite number). Bull. Georgian Acad. Sci., 169, no. 3, 2004, $463-465$.
51. DiasamidzeYa.I., MakharadzeSh.I., Classes of complete semigroups of binary relations. International Algebraic Conference. Abstracts of Reports, Moscow, 2004, $44-45$.
52. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite $X-$semilattices of unions. Modern Mathematics and its Applications, Algebra and Geometry, v. 27, Tbilisim2005, $46-94$.
53. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite $X-$semilattices of unions. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 141, № 4, 2007, 1134-1181.
54. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., Complete Semigroups of Binary Relations whose Set of all Idempotents is a Semigroup. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 1 (175), no. 4, 2007, $31-35$.
55. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Diasamidze Il., Idempotents and regular elements of complete semigroups of binary relations. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 153, no. 4, 2008, $481-499$.
56. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., On $XI-$Semilattices of Unions. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 2 ,no. 1, 2008, $16-24$.
57. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., Complete Semigroups of Binary Relations whose Set of Regular Elements is a Semigroup. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 2, no. 2, 2008, $9-15$.
58. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Complete semigroup of binary relations. Fundamental and application mathematic. 2008, 14, no. 8, 73-99.
59. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Complete Semigroups of Binary Relations defined by $X-$Semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, New York, Vol. 166, no. 5, 2010, $615-633$.
60. DiasamidzeYa., The property of right units of complete semigroups of binary relations defined finite $XI-$semilattices of unions. Procedings of the international conference "Modern algebra and its applications" . Batumi, Georgia, 2010, $38-40$.
61. DiasamidzeYa., Erdogan A., Chimen N., Idempotent elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_6(X,7)$. Procedings of the international conference "Modern algebra and its applications". Batumi, Georgia, 2010, $41-55$.

62. DiasamidzeYa., makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations defined finite $XI-$semilattices of unions. Procedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2010, $56-58$.
63. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations. Sputnik +, Moscow, 2010, $-$ (in Russian).
64. DiasamidzeYa., Complete $XI-$semilattices of unions. Procedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2011, $48-52$.
65. DiasamidzeYa., Erdogan A., Chimen N., Regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_6(X,7)$. Procedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2011, $53-68$.
66. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Rokva N., Right units and there number of the complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class nets. Procedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2011, $69-72$.
67. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Partenadze G., Idempotent elements of complete semigroups of binary relations defined by the finite $X-$semilattices of the rooted tree class. Abstracts II international conference. 2011, Batumi, Georgia, $81-82$.
68. DiasamidzeYa., Makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations. Istanbul, , 2013, $-$ (in English). www.kriteryayinvery.cominfo@kriteryayinevy.comkriteryayin@gmail.com (Monograph).
69. DiasamidzeYa. andTavdgiridzeGiuli. Some Regular Elements, Idempotents and Right Units of Semigroup $B_X(D)$ Defined by $X-$Semilattices which is union of a Chain and two Rhombus. Journal of Gen. Math. Notes, vol. 26, No 1, 2015, pp. 84-101. www.i-csrs.orghttp://www.geman.in
70. DiasamidzeYa and TavdgiridzeGiuli, Some Regular Elements, Idempotents and Right Units of Semigroup $B_X(D)$ Defined by $X-$Semilattices which is union of a Two Rhombus and Chain. International Journal of ScietificEnginering and Applied Science (IJSEAS) - vol. 1, No 1, Issue -7, October 2015, pp. 548-556. www.ijseas.com
71. DiasamidzeYa. andBakuridze A. On Some Properties of Regular Elements of Complete Semigroups Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_4(X,8)$. (IJESIT) International Journal of Enginering science and Inovate Technology, Vol. 4, Issue 4, july 2015, pp. 8-15. http://www.ijsit.com./archive/23/volume-4issue-4-july.2015.html
72. DiasamidzeYa,Makharadze Shota, Aydin Neşet, Erdogan Ali. Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class $Z-$Elementary $X-$Semilattice of Unions. Sarajevo Journal of Mathematics, Vol. 11 (23), No. 1, (2015),17-35.
73. DiasamidzeYasha,Erdogan Ali, Aydin Neşet, Some Regular Elements, Idempotents and Right Units of Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the

Class Lower Icomplete Nets. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 93, No. 4 2014, 549-566.
74. DiasamidzeYasha,AlbayrakBariş, Aydin Neşet, Regular Elements of the Complete Semigroups of Binary Relations of the Class $\Sigma_7(X,8)$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 86, No. 1 2013, 199-216.
75. DiasamidzeYa. andBakuridze A.Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_4(X,8)$ and their Calculation Formulas, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 165 (2014), 41-66.
76. DiasamidzeYa. and A. Bakuridze.On Idempotent Elements of the Complete Semigroups of Binary RelationsDefined by Semilattices of Unions, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 166 (2014), 9-30.
77. DiasamidzeYa., MakharadzeSh., RokvaN., Right Units in Complete Semigroups of Binary Relations. Journal of Mathematical Sciences. September 2013, Volume 193, Issue 3, pp 401-403.
78. DiasamidzeYasha, Tsinaridze Nino. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of The Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ and their calculation Formulas. International Journal of Pure Mathematical Sciences ISSN:2297-6205. Vol. 16, pp 1-23.
79. DiasamidzeYasha, Tsinaridze Nino, AidnNeset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X,10)$-I. Applied Mathematics, 2016, 7, 867-893,
80. DiasamidzeYasha, Tsinaridze Nino, AidnNeset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X,10)$-II. Applied Mathematics, 2016, 7, 894-907,
81. Givradze O., Some properties of the semigroup $B_X(D)$ defined by a semilattice of the class $\Sigma_1(X,4)$. Bull Georgian Acad. Sci., 167, no. 1, 2003, $43-46$.
82. Givradze O., Some properties of the semigroup $B_X(D)$ defined by a semilattice of the class $\Sigma_1(X,4)$. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $117-120$.
83. Givradze O., The number of equivalences on a finite set. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $121-122$.
84. Givradze Omar. Irreducible Generating Sets of Complete Semigroups of Unions.Journal of Mathematical Sciences: March 2014, Vol. 197, Issue 6, pp 755-760. http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-014-1759-5
85. Khiladze D., Semigroups BX(D) defined by semilattices of the classes $\Sigma_3(X,4)$ and $\Sigma_4(X,4)$. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $137-138$.
86. Kuratovski K., Mostovski A., Theory of sets. Mir, Moscow, 1970 (in Russian).
87. Kenneth D. Magill, Jr., Automorphisms of the semigroup of all relations on a set. Candian Math. Bull., 9, no.1, 1966, $73-77$.

88. MakharadzeSh.I., Divisibility, Green relations and regular elements of the semigroup $\theta_X^{(r)}(\alpha)$. Batumi Univ. Press, Batumi, 1997, $1-23$.
89. Makharadze Sh., On the theory of the semigroup of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no.2, 1999, $205-208$.
90. Makharadze Sh., Maximal idempotent groups in the binary relation semigroup. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no.3, 1999, $373-375$.
91. Makharadz Sh., Remarks on the theory of binary relation semigroup. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 121, 1999, $109-116$.
92. MakharadzeSh.I., Maximal idempotent semigroups from $\theta_X^{(r)}\left(\omega_{X_1X_2}\right)$. Proc. Batumi State Univ., no. 2, Batumi, 1998, $33-38$.
93. MakharadzeSh.I., Semigroups of binary relations with right units. Ajara, Batumi, 2001, $1-153$.
94. Makharadze Sh., Semigroups of binary relations with right units. International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications and Poster Sessions, Beijing 2002, 27.
95. Makharadze Sh., Diasamidze Il., Characteristic sets of complete $X-$semilattices of unions. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, $474-476$.
96. Makharadze Sh., Regular elements of semigroups $B_X(D)$ defined by generalized elementary $X-$semilattices. Intellect, periodic scientific journal, no. 3(14), 2002, Tbilisi, $21-26$.
97. Makharadze Sh., Maximal subgroups of some classes of complete semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $143-144$.
98. Makharadze Sh., Regular elements of the semigroup $B_X(D)$ determined by the generalized elementary $X-$semilattices. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $145-147$.
99. MakharadzeSh.I., Semigroups of binary relations with right units. ItogiNaukiiTekhniki. ItogiNaukiiTekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, 98, 2002 (in Russian).
100. MakharadzeSh.I., Semigroups of binary relations with right units. Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publ. Corp., New York, 117, no.4, 2003, $4351-4392$.
101. MakharadzeSh.I., DiasamidzeI.Ya., One class of complete semigroups of binary relations. ItogiNaukiiTekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, 98, 2002 (in Russian).
102. MakharadzeSh.I., DiasamidzeI.Ya., One class of complete semigroups of binary relations. Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publ. Corp., New York, 117, no.4, 2003, $4393-4424$.
103. Makharadze Sh., Bakuridze A., Complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class X. Bull. Georgian Acad. Sci., 170, no.3, 2004, $462-465$.

104. Makharadze Shota, Aydin Neşet, Erdogan Ali. Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_1(X,10)$. Applied Mathematics, 2015, 6, 274-294. http://www.scirp.org/journal/amhttp://dx.doi.org/10.4236/am.2015.62026
105. Partenadze G., Semigroups $B_X(D)$ defined by complete $X-$semilattices of the class $\Sigma_1(X,6)$. Proc. A.Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 116.
106. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the semigroup of all binary relations. Trans. A.I. Herzen Leningrad State Polytechn. Inst., 183, 1958, $251-263$ (in Russian).
107. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the semigroup of all reflective binary relations. Trans. A.I. Herzen Leningrad State Polytechn. Inst., 1958, $265-269$ (in Russian).
108. Zaretskii K. A., Representation of ordered semigroups of binary relations. Izv. Vish. Uchebn. Zaved. Matematika, 6, 1959, $48-50$ (in Russian).
109. Zaretskii K. A., Regular elements of the semigroup of binary relations. Uspekhi Mat, Nauk, 17, no.3, 1962, $177-189$ (in Russian).
110. Zaretskii K. A., A semigroup of binary relations. Matem. Sbornik, 61, no.3, 1963, $291-305$ (in Russian).
111. Zaretskii K. A., A semigroup of completely effective binary relations. In the collection: Theory of Semigroups and Its Applications, I, 1965, Saratov University Press, 1965, $238-250$ (in Russian).
112. Zaretskii K. A., On the ideals of semigroups. Uspekhi Mat. Nauk, 14, no.6, 1959, $173-174$ (in Russian).
113. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the class of semigroups of partially reflective binary relations. Sibirsk. Mat. Zh., 8, no. 6, 1967 (in Russian).
114. Zaretskii K. A., On monogenic semigroups of binary relations. Izv. Vish. Uchebn. Zaved. Matematika, 131, no. 4, 1973, $15-20$ (in Russian).
115. Zareckii K.A., Maximal submonoids of the semigroup of binary relations. Semigroup Forum, 9, no. 5, 1974, $196-208$.
116. Zaretskii K. A., Oncongruences on the semigroup of binary relations. Associative Actions. Leningrad, 1983, $30-39$ (in Russian).
117. Zaretskii K. A., Maximal regular subsemigroups of the semigroup of binary relations. Associative Actions, Leningrad, 1983, $40-46$.
118. Zaretskii K. A., Equiprojective idempotent binary relations. Teoriya polugrupp i ee Prilozheniya, 5, Saratov Univ. Press, 1985, $29-31$ (in Russian).
119. Zaretskii K. A., On partial congruences on the semigroup of binary relations. TeoriyapolugruppieePrilozheniya, 7, 1984, Saratov Univ. Press, $16-23$ (in Russian).
120. Zaretskii K. A., Lattices of the sections of binary relations. Uporyadoch. Mnozhestva i Reshetki, 9, 1986, Saratov Univ. Press, $24-33$ (in Russian).

121. TavdgiridzeGiuli and DiasamidzeYa. Regular Elements and Right Units of Semigroup $B_X(D)$ Defined Semilattice D for which $V(D,\alpha)=Q=\Sigma_3(X,8)$, Journal of Applied Mathematics, 6, 2015, 373-381.
122. TavdgiridzeGiuli and DiasamidzeYa. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_3(X,8)$, when $Z_7 \neq \varnothing$. IJISET-International Journal of InovativeSciece, Enginering and Technology, Vol. 2, Issue 11, November 2015, 797-806.
123. TavdgiridzeGiuli. Maximal Subgroups of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_3(X,8)$. Gen. Math. Notes. Vol. 27, No. 1, March 2015, pp 69-89.
124. TavdgiridzeGiuli , DiasamidzeYasha, Givradze Omari.Idempotent Elements of the Semigroups Bx(D) Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_3(X,8)$ When $Z_7 \neq \varnothing$. **Applied Mathematics** Vol.7 No.3, Pub. Date: February 25, 2016.
125. Tsinaridze Nino. Subsemilattice of a Semilattice of Class $\Sigma_2(X,8)$. Journal of Mathematical Sciences Vol. 191, No. 6, june, 2013, pp. 871-875.
126. Tsinaridze Nino,Makharadze Shota. Regular Elements of the Complete Semigroups $B_X(D)$ of Binary Relations of the Class $\Sigma_2(X,8)$. Applied Mathematics, 2015, 6, 447-455.
127. Tsinaridze Nino. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$. Gen. Math. Notes. Vol. 27, No. 2, April 2015
128. Tsinaridze Nino, Makharadze Shota, Fartenadze Guladi. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$ and Their Calculation Formulas. Applied Mathematics, 2015, 6, 2257-2278.
129. Tsinaridze Nino, DiasamidzeYasha. Maximal Subcroups of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$. IJESIT- International Journal of Engineering Science and Innovative Technology, Vol. 4, Issue 6, November 2015, pp. 61-74.
130. Tsinaridze Nino. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. IJISET−International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology, Vol. 3 Issue 1, January 2016, 162-171.
131. Tsinaridze, N., Makharadze, S. &Partenadze, G. On the Regular Elements of the Semigroup of Binary Relations. Journal of Mathematical Sciences Vol. 218, No. 6, November, 2016, pp. 857-867.
132. Tsinaridze, N., Makharadze, S. &Rokva, N. Idempotent Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$. Journal of Mathematical Sciences Vol. 218, No. 6, November, 2016, pp. 868-878.

133. Idempotent Elements of the Semigroups Bx(D) Defined by Semilattices of the Class $\sum_3(X,8)$ When $Z_7 = \varnothing$ .GiuliTavdgiridze, YashaDiasamidze and OmariGivradze.Journal of Mathematical Sciences. Volume 218, Issue 6, pp 848–856
http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-016-3075-8
134. On idempotent Elements of the Semigroup of Binary Relations. GiuliTavdgiridze, IashaDiasamidze and OmariGivradze. Journal of Mathematical Sciences. Volume 216, Issue 4, pp 590–602 http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-016-2920-0
135. O. Givradze. Irreducible Generating Sets of Complete Semigroups of Unions $B_X(D)$ Defined by Semilattices of Class $\Sigma_2(X, 4)$, Where $|X| = 3$.Journal of Mathematical Sciences; pp 1-6; First online: 13 June **2016.**
http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10958-016-2912-0
136. O. Givradze. Irreducible Generating sets of Complete Semigroups of Unions.Journal of Mathematical Sciences: March **2014**, Volume 197, Issue 6, pp 755-760. http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-014-1759-5
137. O. Givradze. Irreducible Generating Sets of Complete Semigroups of Unions $B_X(D)$ Defined by Semilattices of Class $\Sigma_2(X,4)$. Journal of Mathematical Sciences; November **2012,** Volume 186, Issue 5, pp 745-750.
http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10958-012-1026-6

სადისერტაციო თემასთან დაკავშირებული გამოქვეყნებული ნაშრომთა სია

1. Ya. Diasamidze and A. Bakuridze. Regular elements of the semigroup $B_{X}(D)$ defined by semilattices of the class $\Sigma_{4}(X,8)$ and their calculation formulas, 165 (2014), 41-66. Proceedings of A. Razmadze Mathematical InstituteTable of Contents, v. 165, 2014
2. Ya. Diasamidze and A. Bakuridze. On Idempotent Elements of the Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of Unions, 166 (2014), 9-30. Proceedings of A. Razmadze Mathematical InstituteTable of Contents, v. 165, 2014
3. *Author's:Yasha Diasamidze and Alexander Bakuridze.* On Some Properties of Regular Elements of Complete Semi groups Defined by Semi lattices of the Class $\Sigma 4(X, 8)$ http://www.ijesit.com */archive/23/volume-4issue-4-july-2015.html*
4. *Author's: Alexander Bakuridze.* GENERATED SETS OF THE COMPLETE SEMIGROUP BINARI RELATIONS DEFINED BY SEMILATTICES OF THE CLASS $\Sigma_1(X,2)$ http://www.ijesit.com/ *archive/31/volume-5issue-6-november-2016.html*
5. *Author's:Yasha Diasamidze,Omar Givradze,Alexander Bakuridze.* GENERATED SETS OF THE COMPLETE SEMIGROUP BINARI RELATIONS DEFINED BY SEMILATTICES OF THE CLASS $\Sigma 1(X,3)$ http://www.ijesit.com/ *archive/31/volume-5issue-6-november-2016.html*

მაგალითი ვთქვათ, $= \{ \qquad \} = \breve{\ }$ და

$$P_1 = \{1\},\ P_2 = \{2\},\ P_3 = \{3\},$$
$$P_4 = \{4\},\ P_5 = \{5\},\ P_0 = P_6 = P_7 = \varnothing .$$

მაშინ

$$\breve{D} = \{1,2,3,4,5\},$$

$$Z_1 = \{2,3,4,5\},$$

$$Z_2 = \{1,3,4,5\},$$

$$Z_3 = \{1,2,4,5\},$$

$$Z_4 = \{2,3,5\},$$

$$Z_5 = \{2,3,4\},$$

$$Z_6 = \{2,4,5\},$$

$$Z_7 = \{2,5\}$$

და $D = \{\{2,5\},\{2,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$.

ამ შემთხვევაში $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობა გვექნება:

$$|I^*(Q_1)| = 8\ ,\quad |I^*(Q_2)| = 47\ ,$$

$$|I^*(Q_3)| = 29\ ,\quad |I^*(Q_4)| = 3\ ,$$

$$|I^*(Q_5)| = 9\ ,\quad |I^*(Q_6)| = 1\ ,$$

$$|I^*(Q_7)| = 1\ ,\quad |I^*(Q_8)| = 1\ ,$$

ე.ი., $|I_D| = 99$.

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}11011\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_3 \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_4 \begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_5 \begin{pmatrix}11011\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_6 \begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_7 \begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_8 \begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_9 \begin{pmatrix}11011\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{10}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{11} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{12} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{13} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{14} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{15} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\01101\\01001\end{pmatrix}_{16} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\01101\\01001\end{pmatrix}_{17} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\01101\\01001\end{pmatrix}_{18} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{19} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{20}$$

$$\begin{pmatrix}11011\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{21} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{22} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{23} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{24} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{25} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{26} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{27} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{28} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{29} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{30}$$

$$\begin{pmatrix}11011\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{31} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{32} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{33} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{34} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{35} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{36} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{37} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{38} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{39} \begin{pmatrix}01011\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{40}$$

$$\begin{pmatrix}11011\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{41} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{42} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01111\\01001\end{pmatrix}_{43} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01001\\01111\\01001\end{pmatrix}_{44} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01111\\01001\end{pmatrix}_{45} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\01111\\01001\end{pmatrix}_{46} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\01111\\01001\end{pmatrix}_{47} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01101\\01111\\01001\end{pmatrix}_{48} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\01111\\01001\end{pmatrix}_{49} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{50}$$

$$\begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{51} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{52} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\11011\\01001\end{pmatrix}_{53} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01001\\11011\\01001\end{pmatrix}_{54} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\11011\\01001\end{pmatrix}_{55} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01101\\11011\\01001\end{pmatrix}_{56} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{57} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{58} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{59} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{60}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\11111\\01001\end{pmatrix}_{61} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\11111\\01001\end{pmatrix}_{62} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\11111\\01001\end{pmatrix}_{63} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\11111\\01001\end{pmatrix}_{64} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\11111\\01001\end{pmatrix}_{65} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\11111\\01001\end{pmatrix}_{66} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\11111\\01001\end{pmatrix}_{67} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01101\\01101\\01101\end{pmatrix}_{68} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01101\\01101\\01101\end{pmatrix}_{69} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01101\\01111\\01101\end{pmatrix}_{70}$$

$$\begin{pmatrix}01111\\01101\\01101\\01111\\01101\end{pmatrix}_{71} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01101\\01111\\01101\end{pmatrix}_{72} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01101\\11111\\01101\end{pmatrix}_{73} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01101\\11111\\01101\end{pmatrix}_{74} \begin{pmatrix}01110\\01110\\01110\\01110\\01110\end{pmatrix}_{75} \begin{pmatrix}11111\\01110\\01110\\01110\\01110\end{pmatrix}_{76} \begin{pmatrix}01011\\01011\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{77} \begin{pmatrix}11011\\01011\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{78} \begin{pmatrix}11111\\01011\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{79} \begin{pmatrix}01011\\01011\\01111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{80}$$

$$\begin{pmatrix}01111\\01011\\01111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{81} \begin{pmatrix}11011\\01011\\01111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{82} \begin{pmatrix}11111\\01011\\01111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{83} \begin{pmatrix}11011\\01011\\11011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{84} \begin{pmatrix}01011\\01011\\11111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{85} \begin{pmatrix}11011\\01011\\11111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{86} \begin{pmatrix}11111\\01011\\11111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{87} \begin{pmatrix}01110\\01110\\01110\\01110\\01111\end{pmatrix}_{88} \begin{pmatrix}01111\\01110\\01110\\01110\\01111\end{pmatrix}_{89} \begin{pmatrix}11111\\01110\\01110\\01110\\01111\end{pmatrix}_{90}$$

$$\begin{pmatrix}01111\\01111\\01111\\01111\\01111\end{pmatrix}_{91} \begin{pmatrix}11111\\01111\\01111\\01111\\01111\end{pmatrix}_{92} \begin{pmatrix}10111\\10111\\10111\\10111\\10111\end{pmatrix}_{93} \begin{pmatrix}10111\\11111\\10111\\10111\\10111\end{pmatrix}_{94} \begin{pmatrix}11011\\11011\\11011\\11011\\11011\end{pmatrix}_{95} \begin{pmatrix}11011\\11011\\11111\\11011\\11011\end{pmatrix}_{96} \begin{pmatrix}01110\\01110\\01110\\01110\\11111\end{pmatrix}_{97} \begin{pmatrix}11111\\01110\\01110\\01110\\11111\end{pmatrix}_{98} \begin{pmatrix}11111\\11111\\11111\\11111\\11111\end{pmatrix}_{99}$$

მაგალითი ვთქვათ $=\{ \qquad \} = \breve{}$ და

$$
\begin{aligned}
&P_0=\{8\},\ P_1=\{1\},\\
&P_2=\{2\},\ P_3=\{3\},\\
&P_4=\{4\},\ P_5=\{5\},\\
&P_6=\{6\},\ P_7=\{7\}
\end{aligned}
.
$$

მაშინ

$$
\begin{aligned}
\breve{} &= \{ \qquad \},\\
&= \{ \qquad \}\\
&= \{ \qquad \},\\
&= \{ \qquad \},\\
&= \{ \qquad \},\\
&= \{ \qquad \},\\
&= \{ \qquad \},\\
&= \{ \qquad \}
\end{aligned}
$$

და

$$
\begin{aligned}
D=\{&\{2,5,8\},\ \{2,4,5,7,8\},\ \{2,3,4,6,7,8\},\\
&\{2,3,5,6,7,8\},\ \{1,2,4,5,6,7,8\},\\
&\{1,3,4,5,6,7,8\},\ \{2,3,4,5,6,7,8\},\ \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}.
\end{aligned}
$$

ამ შემთხვევაში ამ შემთხვევაში $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობა გვექნება:

$$
|I^*(Q_1)|=8,\ \ |I^*(Q_2)|=175,\ \ |I^*(Q_3)|=241,
$$

$$
|I^*(Q_4)|=37,\ \ |I^*(Q_5)|=17,\ \ |I^*(Q_6)|=3,
$$

$$
|I^*(Q_7)|=6,\ \ |I^*(Q_8)|=1,\ \ |I_D|=488
$$

$$
\begin{pmatrix}11111111\\11111111\\11111111\\11111111\\11111111\\11111111\\11111111\\11111111\end{pmatrix}_1
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_2
\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_3
\begin{pmatrix}10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_4
\begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_5
\begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_6
\begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_7
$$

$$
\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_8
\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_9
\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{10}
\begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{11}
\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{12}
\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{13}
\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{14}
$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{15}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{16}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{17}\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{18}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{19}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{20}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{21}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{22}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{23}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{24}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{25}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{26}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{27}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{28}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{29}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{30}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{31}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{32}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{33}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{34}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{35}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{36}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{37}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{38}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{39}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{40}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{41}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{42}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{43}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{44}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{45}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{46}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{47}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{48}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{49}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{50}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{51}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{52}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{53}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{54}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{55}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{56}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{57}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{58}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{59}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{60}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{61}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{62}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{63}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{64}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{65}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{66}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{67}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{68}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{69}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{70}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{71}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{72}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{73}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{74}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{75}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{76}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{77}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{78}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{79}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{80}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{81}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{82}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{83}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{84}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{85}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{86}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{87}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{88}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{89}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{90}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{91}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{92}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{93}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{94}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{95}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{96}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{97}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{98}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{99}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{100}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{101}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{102}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{103}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{104}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{105}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{106}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{107}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{108}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{109}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{110}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{111}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{112}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{113}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{114}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{115}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{116}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{117}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{118}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{119}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{120}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{121}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{122}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{123}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{124}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{125}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{126}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{127}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{128}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{129}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{130}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{131}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{132}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{133}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{134}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{135}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{136}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{137}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{138}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{139}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{140}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{141}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{142}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{143}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{144}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{145}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{146}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{147}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{148}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{149}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{150}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{151}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{152}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{153}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{154}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{155}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{156}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{157}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{158}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{159}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{160}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{161}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{162}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{163}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{164}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{165}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{166}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{167}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{168}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{169}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{170}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{171}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{172}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{173}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{174}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{175}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{176}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{177}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{178}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{179}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{180}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{181}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{182}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{183}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{184}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{185}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{186}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{187}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{188}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{189}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{190}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{191}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{192}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{193}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{194}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{195}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{196}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{197}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{198}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{199}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{200}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{201}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{202}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{203}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{204}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{205}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{206}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{207}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{208}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{209}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{210}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{211}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{212}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{213}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{214}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{215}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{216}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{217}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{218}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{219}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{220}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{221}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{222}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{223}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{224}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{225}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{226}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{227}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{228}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{229}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{230}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{231}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{232}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{233}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{234}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{235}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{236}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{237}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{238}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{239}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{240}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{241}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{242}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{243}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{244}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{245}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{246}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{247}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{248}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{249}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{250}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{251}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{252}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{253}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{254}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{255}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{256}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{257}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{258}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{259}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{260}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{261}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{262}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{263}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{264}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{265}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{266}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{267}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{268}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{269}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{270}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{271}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{272}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{273}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{274}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{275}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{276}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{277}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{278}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{279}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{280}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{281}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{282}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{283}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{284}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{285}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{286}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{287}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{288}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{289}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{290}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{291}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{292}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{293}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{294}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{295}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{296}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{297}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{298}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{299}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{300}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{301}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{302} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{303} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{304} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{305} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{306} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{307} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{308}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{309} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{310} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{311} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{312} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{313} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{314} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{315}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{316} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{317} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{318} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{319} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{320} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{321} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{322}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{323} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{324} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{325} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{326} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{327} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{328} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{329}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{330} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{331} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{332} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{333} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{334} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{335} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{336}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{337} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{338} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{339} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{340} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{341} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{342} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{343}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{344} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{345} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{346} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{347} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{348} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{349} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{350}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{351} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{352} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{353} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{354} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{355} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{356} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{357}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{358} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{359} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{360} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{361} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{362} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{363} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{364}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{365}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{366}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{367}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{368}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{369}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{370}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{371}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{372}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{373}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{374}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{375}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{376}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{377}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{378}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{379}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{380}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{381}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{382}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{383}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{384}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{385}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{386}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{387}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{388}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{389}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{390}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{391}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{92}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{393}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{394}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{395}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{396}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{397}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{398}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{399}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{400}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{401}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{402}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{403}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{404}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{405}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{406}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{407}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{408}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{409}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{410}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{411}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{412}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{413}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{414}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{415}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{416}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{417}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{418}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{419}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{420}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{421}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{422}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{423}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{424}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{425}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{426}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{427}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{428} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{429} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{430} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{431} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{432} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{433} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{434}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{435} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{436} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{437} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{438} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{439} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{440} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{441}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{442} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{443} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{444} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{445} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{446} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{447} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{448}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{449} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{450} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{451} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{452} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{453} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{454} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{455}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{456} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{457} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{458} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{459} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{460} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{461} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{462}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{463} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{464} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{465} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{466} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{467} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{468} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{469}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{470} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{471} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{472} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{473} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{474} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{475} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{476}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{477} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{478} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{479} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{480} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{481} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{482} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{483}$$

$$\begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{484} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{485} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{486} \begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{487} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{488}$$

დამატება - 3

მაგალითი ვთქვათ $=\{\qquad\} = \breve{\ }$ და

$$\begin{aligned}&P_1 = \{1\},\ P_2 = \{2\},\\ &P_3 = \{3\},\ P_4 = \{4\},\\ &P_5 = \{5\},\\ &P_0 = P_6 = P_7 = \varnothing\end{aligned} \quad .$$

მაშინ

$$\breve{D} = \{1,2,3,4,5\},$$

$$Z_1 = \{2,3,4,5\},$$

$$Z_2 = \{1,3,4,5\},$$

$$Z_3 = \{1,2,4,5\},$$

$$Z_4 = \{2,3,5\},$$

$$Z_5 = \{2,3,4\},$$

$$Z_6 = \{2,4,5\},$$

$$Z_7 = \{2,5\}$$

და

$$D = \{\{2,5\},\{2,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}.$$

ამ შემთხვევაში $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების რაოდენობა გვექნება:

$$|R^*(Q_1)| = 8,\ |R^*(Q_2)| = 150,$$

$$|R^*(Q_3)| = 121,\ |R^*(Q_4)| = 9,$$

$$|R^*(Q_5)| = 40,\ |R^*(Q_6)| = 2,$$

$$|R^*(Q_7)| = 2,\ |R^*(Q_8)| = 1,$$

ე.ი.

$$|R_D| = 333.$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{1} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{2} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{3} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{4} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{5} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{6} \begin{pmatrix}01001\\01011\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{7} \begin{pmatrix}01001\\01101\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{8} \begin{pmatrix}01001\\11011\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{9} \begin{pmatrix}01001\\01111\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{10} \begin{pmatrix}01001\\11111\\01001\\01001\\01001\end{pmatrix}_{11}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{12} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{13} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{14} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{15} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{16} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{17} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_{18} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_{19} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_{20} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_{21}$$

$$\begin{pmatrix}01111\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_{22} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\01001\\01001\end{pmatrix}_{23} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{24} \begin{pmatrix}01011\\01001\\11011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{25} \begin{pmatrix}01101\\01001\\11011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{26} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{\partial 7} \begin{pmatrix}01111\\01001\\11011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{28} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11011\\01001\\01001\end{pmatrix}_{29} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{30} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{31}$$

$$\begin{pmatrix}01101\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{32} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{33} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{34} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{35} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{36} \begin{pmatrix}01011\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{37} \begin{pmatrix}01101\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{38} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{39} \begin{pmatrix}01111\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{40} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\01001\\01001\end{pmatrix}_{41}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{42} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{43} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{44} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{45} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01011\\01001\end{pmatrix}_{46} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{47} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{48} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{49} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{50} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{51}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{52} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{53} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{54} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{55} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01101\\01011\\01001\end{pmatrix}_{56} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{57} \begin{pmatrix}01011\\01001\\11011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{57} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{59} \begin{pmatrix}01111\\01001\\11011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{60} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11011\\01011\\01001\end{pmatrix}_{61}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{62} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{63} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{64} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{65} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{66} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{67} \begin{pmatrix}01011\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{68} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{69} \begin{pmatrix}01111\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{70} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\01011\\01001\end{pmatrix}_{71}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01101\\01001\end{pmatrix}_{72} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01001\\01101\\01001\end{pmatrix}_{73} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01001\\01101\\01001\end{pmatrix}_{74} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01101\\01001\end{pmatrix}_{75} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{76} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{77} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{78} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{79} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{80} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\01101\\01001\end{pmatrix}_{81}$$

$$\begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\01101\\01001\end{pmatrix}_{82} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01101\\01101\\01001\end{pmatrix}_{83} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\01101\\01001\end{pmatrix}_{84} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{85}, \begin{pmatrix}01101\\01001\\11011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{86} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{87} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11011\\01101\\01001\end{pmatrix}_{88} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\01101\\01001\end{pmatrix}_{89} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01111\\01101\\01001\end{pmatrix}_{90} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\01101\\01001\end{pmatrix}_{91}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\01101\\01001\end{pmatrix}_{92} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\01101\\01001\end{pmatrix}_{93} \begin{pmatrix}01101\\01001\\11111\\01101\\01001\end{pmatrix}_{94} \begin{pmatrix}01111\\01001\\11111\\01101\\01001\end{pmatrix}_{95} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\01101\\01001\end{pmatrix}_{96} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\11011\\01001\end{pmatrix}_{97} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01001\\11011\\01001\end{pmatrix}_{98} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\11011\\01001\end{pmatrix}_{99} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{100} \begin{pmatrix}01011\\01001\\01011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{101}$$

$$\begin{pmatrix}11011\\01001\\01011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{102} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{103} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\11011\\01001\end{pmatrix}_{104} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\11011\\01001\end{pmatrix}_{105} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01101\\11011\\01001\end{pmatrix}_{106} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\11011\\01001\end{pmatrix}_{107} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{108} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{109} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11011\\11011\\01001\end{pmatrix}_{110}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{111} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{112} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{113} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{114} \begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{115} \begin{pmatrix}11011\\01001\\11111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{116} \begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\11011\\01001\end{pmatrix}_{117} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01111\\01001\end{pmatrix}_{118\partial} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01001\\01111\\01001\end{pmatrix}_{119}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01111\\01001\end{pmatrix}_{120}\begin{pmatrix}01001\\01001\\01011\\01111\\01001\end{pmatrix}_{121}\begin{pmatrix}01011\\01001\\01011\\01111\\01001\end{pmatrix}_{122}\begin{pmatrix}01111\\01001\\01011\\01111\\01001\end{pmatrix}_{123}\begin{pmatrix}11111\\01001\\01011\\01111\\01001\end{pmatrix}_{124}\begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\01111\\01001\end{pmatrix}_{125}\begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\01111\\01001\end{pmatrix}_{126}\begin{pmatrix}01111\\01001\\01101\\01111\\01001\end{pmatrix}_{127}\begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\01111\\01001\end{pmatrix}_{128}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\11011\\01111\\01001\end{pmatrix}_{129}\begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\01111\\01001\end{pmatrix}_{130}\begin{pmatrix}01111\\01001\\11011\\01111\\01001\end{pmatrix}_{131}\begin{pmatrix}11111\\01001\\11011\\01111\\01001\end{pmatrix}_{132}\begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{133}\begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{134}\begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{135}\begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{136}\begin{pmatrix}01111\\01001\\11111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{137}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\01111\\01001\end{pmatrix}_{138}\begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\11111\\01001\end{pmatrix}_{139}\begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\11111\\01001\end{pmatrix}_{140}\begin{pmatrix}01001\\01001\\01011\\11111\\01001\end{pmatrix}_{141}\begin{pmatrix}01011\\01001\\01011\\11111\\01001\end{pmatrix}_{142}\begin{pmatrix}11111\\01001\\01011\\11111\\01001\end{pmatrix}_{143}\begin{pmatrix}01001\\01001\\01101\\11111\\01001\end{pmatrix}_{144}\begin{pmatrix}01101\\01001\\01101\\11111\\01001\end{pmatrix}_{145}\begin{pmatrix}11111\\01001\\01101\\11111\\01001\end{pmatrix}_{146}$$

$$\begin{pmatrix}01001\\01001\\11011\\11111\\01001\end{pmatrix}_{147}\begin{pmatrix}11011\\01001\\11011\\11111\\01001\end{pmatrix}_{148}\begin{pmatrix}11111\\01001\\11011\\11111\\01001\end{pmatrix}_{149}\begin{pmatrix}01001\\01001\\01111\\11111\\01001\end{pmatrix}_{150}\begin{pmatrix}01111\\01001\\01111\\11111\\01001\end{pmatrix}_{151}\begin{pmatrix}11111\\01001\\01111\\11111\\01001\end{pmatrix}_{152}\begin{pmatrix}01001\\01001\\11111\\11111\\01001\end{pmatrix}_{153}\begin{pmatrix}11111\\01001\\11111\\11111\\01001\end{pmatrix}_{154}\begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01001\\01011\end{pmatrix}_{155}$$

$$\begin{pmatrix}01011\\01001\\01001\\01001\\01011\end{pmatrix}_{156}\begin{pmatrix}11011\\01001\\01001\\01001\\01011\end{pmatrix}_{157}\begin{pmatrix}01111\\01001\\01001\\01001\\01011\end{pmatrix}_{158}\begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01001\\01011\end{pmatrix}_{159}\begin{pmatrix}01011\\01011\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{160}\begin{pmatrix}11011\\01011\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{161}\begin{pmatrix}01111\\01011\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{162}\begin{pmatrix}11111\\01011\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{163}\begin{pmatrix}01011\\11011\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{164}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01011\\11011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{165}\begin{pmatrix}01011\\01111\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{166}\begin{pmatrix}01011\\11111\\01011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{167}\begin{pmatrix}01011\\01011\\11011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{168}\begin{pmatrix}11011\\01011\\11011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{169}\begin{pmatrix}01111\\01011\\11011\\01011\\01011\end{pmatrix}_{170}\begin{pmatrix}01011\\01011\\01111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{171}\begin{pmatrix}11011\\01011\\01111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{172}\begin{pmatrix}01111\\01011\\01111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{173}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01011\\01111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{174}\begin{pmatrix}01011\\01011\\11111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{175}\begin{pmatrix}11011\\01011\\11111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{176}\begin{pmatrix}01111\\01011\\11111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{177}\begin{pmatrix}11111\\01011\\11111\\01011\\01011\end{pmatrix}_{178}\begin{pmatrix}01011\\01011\\01011\\11011\\01011\end{pmatrix}_{179}\begin{pmatrix}11011\\01011\\01011\\11011\\01011\end{pmatrix}_{180}\begin{pmatrix}11111\\01011\\01011\\11011\\01011\end{pmatrix}_{181}\begin{pmatrix}01011\\01011\\11011\\11011\\01011\end{pmatrix}_{182}$$

$$\begin{pmatrix}11011\\01011\\11011\\11011\\01011\end{pmatrix}_{183}\begin{pmatrix}11111\\01011\\11011\\11011\\01011\end{pmatrix}_{184}\begin{pmatrix}01011\\01011\\01111\\11011\\01011\end{pmatrix}_{185}\begin{pmatrix}11011\\01011\\01111\\11011\\01011\end{pmatrix}_{186}\begin{pmatrix}01111\\01011\\01111\\11011\\01011\end{pmatrix}_{187}\begin{pmatrix}11111\\01011\\01111\\11011\\01011\end{pmatrix}_{188}\begin{pmatrix}01011\\01011\\11111\\11011\\01011\end{pmatrix}_{189}\begin{pmatrix}11011\\01011\\11111\\11011\\01011\end{pmatrix}_{190}\begin{pmatrix}11111\\01011\\11111\\11011\\01011\end{pmatrix}_{191}$$

$$\begin{pmatrix}01011\\01011\\01011\\01111\\01011\end{pmatrix}_{192}\begin{pmatrix}01111\\01011\\01011\\01111\\01011\end{pmatrix}_{193}\begin{pmatrix}11111\\01011\\01011\\01111\\01011\end{pmatrix}_{194}\begin{pmatrix}01011\\01011\\11011\\01111\\01011\end{pmatrix}_{195}\begin{pmatrix}11011\\01011\\11011\\01111\\01011\end{pmatrix}_{196}\begin{pmatrix}01111\\01011\\11011\\01111\\01011\end{pmatrix}_{197}\begin{pmatrix}11111\\01011\\11011\\01111\\01011\end{pmatrix}_{198}\begin{pmatrix}01011\\01011\\01111\\01111\\01011\end{pmatrix}_{199}\begin{pmatrix}01111\\01011\\01111\\01111\\01011\end{pmatrix}_{200}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01011\\01111\\01111\\01011\end{pmatrix}_{201}\begin{pmatrix}01011\\01011\\11111\\01111\\01011\end{pmatrix}_{202}\begin{pmatrix}01111\\01011\\11111\\01111\\01011\end{pmatrix}_{203}\begin{pmatrix}11111\\01011\\11111\\01111\\01011\end{pmatrix}_{204}\begin{pmatrix}01011\\01011\\01011\\11111\\01011\end{pmatrix}_{205}\begin{pmatrix}11111\\01011\\01011\\11111\\01011\end{pmatrix}_{206}\begin{pmatrix}01011\\01011\\11011\\11111\\01011\end{pmatrix}_{207}\begin{pmatrix}11011\\01011\\11011\\11111\\01011\end{pmatrix}_{208}\begin{pmatrix}11111\\01011\\11011\\11111\\01011\end{pmatrix}_{209}$$

$$\begin{pmatrix}01011\\01011\\01111\\11111\\01011\end{pmatrix}_{210}\begin{pmatrix}01111\\01011\\01111\\11111\\01011\end{pmatrix}_{211}\begin{pmatrix}11111\\01011\\01111\\11111\\01011\end{pmatrix}_{212}\begin{pmatrix}01011\\01011\\11111\\11111\\01011\end{pmatrix}_{213}\begin{pmatrix}11111\\01011\\11111\\11111\\01011\end{pmatrix}_{214}\begin{pmatrix}01110\\01110\\01110\\01110\\01110\end{pmatrix}_{215}\begin{pmatrix}01111\\01110\\01110\\01110\\01110\end{pmatrix}_{216}\begin{pmatrix}11111\\01110\\01110\\01110\\01110\end{pmatrix}_{217}\begin{pmatrix}01110\\01111\\01110\\01110\\01110\end{pmatrix}_{218}$$

$$\begin{pmatrix}01110\\11111\\01110\\01110\\01110\end{pmatrix}_{219}\begin{pmatrix}01110\\01110\\01111\\01110\\01110\end{pmatrix}_{220}\begin{pmatrix}01111\\01110\\01111\\01110\\01110\end{pmatrix}_{221}\begin{pmatrix}11111\\01110\\01111\\01110\\01110\end{pmatrix}_{222}\begin{pmatrix}01110\\01110\\11111\\01110\\01110\end{pmatrix}_{223}\begin{pmatrix}01111\\01110\\11111\\01110\\01110\end{pmatrix}_{224}\begin{pmatrix}11111\\01110\\11111\\01110\\01110\end{pmatrix}_{225}\begin{pmatrix}01110\\01110\\01110\\01111\\01110\end{pmatrix}_{226}\begin{pmatrix}01111\\01110\\01110\\01111\\01110\end{pmatrix}_{227}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01110\\01110\\01111\\01110\end{pmatrix}_{228}\begin{pmatrix}01110\\01110\\01111\\01111\\01110\end{pmatrix}_{229}\begin{pmatrix}01111\\01110\\01111\\01111\\01110\end{pmatrix}_{230}\begin{pmatrix}11111\\01110\\01111\\01111\\01110\end{pmatrix}_{231}\begin{pmatrix}01110\\01110\\11111\\01111\\01110\end{pmatrix}_{232}\begin{pmatrix}01111\\01110\\11111\\01111\\01110\end{pmatrix}_{233}\begin{pmatrix}11111\\01110\\11111\\01111\\01110\end{pmatrix}_{234}\begin{pmatrix}01110\\01110\\01110\\11111\\01110\end{pmatrix}_{235}\begin{pmatrix}11111\\01110\\01110\\11111\\01110\end{pmatrix}_{236}$$

$$\begin{pmatrix}01110\\01110\\01111\\11111\\01110\end{pmatrix}_{237} \begin{pmatrix}01111\\01110\\01111\\11111\\01110\end{pmatrix}_{238} \begin{pmatrix}11111\\01110\\01111\\11111\\01110\end{pmatrix}_{239} \begin{pmatrix}01110\\01110\\11111\\11111\\01110\end{pmatrix}_{240} \begin{pmatrix}11111\\01110\\11111\\11111\\01110\end{pmatrix}_{241} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01001\\01101\end{pmatrix}_{242} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01001\\01001\\01101\end{pmatrix}_{243} \begin{pmatrix}01101\\01001\\01001\\01001\\01101\end{pmatrix}_{244} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01001\\01001\\01101\end{pmatrix}_{245}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01001\\01101\end{pmatrix}_{246} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01101\\01101\\01101\end{pmatrix}_{247} \begin{pmatrix}01111\\01101\\01101\\01101\\01101\end{pmatrix}_{248} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01101\\01101\\01101\end{pmatrix}_{249} \begin{pmatrix}01101\\01111\\01101\\01101\\01101\end{pmatrix}_{250} \begin{pmatrix}01101\\11111\\01101\\01101\\01101\end{pmatrix}_{251} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01111\\01101\\01101\end{pmatrix}_{252} \begin{pmatrix}01111\\01101\\01111\\01101\\01101\end{pmatrix}_{253} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01111\\01101\\01101\end{pmatrix}_{254}$$

$$\begin{pmatrix}01101\\01101\\11111\\01101\\01101\end{pmatrix}_{255} \begin{pmatrix}01111\\01101\\11111\\01101\\01101\end{pmatrix}_{256} \begin{pmatrix}11111\\01101\\11111\\01101\\01101\end{pmatrix}_{257} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01101\\01111\\01101\end{pmatrix}_{258} \begin{pmatrix}01111\\01101\\01101\\01111\\01101\end{pmatrix}_{259} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01101\\01111\\01101\end{pmatrix}_{260} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01111\\01111\\01101\end{pmatrix}_{261} \begin{pmatrix}01111\\01101\\01111\\01111\\01101\end{pmatrix}_{262} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01111\\01111\\01101\end{pmatrix}_{263}$$

$$\begin{pmatrix}01101\\01101\\11111\\01111\\01101\end{pmatrix}_{264} \begin{pmatrix}01111\\01101\\11111\\01111\\01101\end{pmatrix}_{265} \begin{pmatrix}11111\\01101\\11111\\01111\\01101\end{pmatrix}_{266} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01101\\11111\\01101\end{pmatrix}_{267} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01101\\11111\\01101\end{pmatrix}_{268} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01111\\11111\\01101\end{pmatrix}_{269} \begin{pmatrix}01111\\01101\\01111\\11111\\01101\end{pmatrix}_{270} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01111\\11111\\01101\end{pmatrix}_{271} \begin{pmatrix}01101\\01101\\11111\\11111\\01101\end{pmatrix}_{272}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01101\\11111\\11111\\01101\end{pmatrix}_{273} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01001\\11011\end{pmatrix}_{274} \begin{pmatrix}11011\\01001\\01001\\01001\\11011\end{pmatrix}_{275} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01001\\11011\end{pmatrix}_{276} \begin{pmatrix}01011\\01011\\01011\\01011\\11011\end{pmatrix}_{277} \begin{pmatrix}11011\\01011\\01011\\01011\\11011\end{pmatrix}_{278} \begin{pmatrix}11111\\01011\\01011\\01011\\11011\end{pmatrix}_{279} \begin{pmatrix}11011\\11011\\11011\\11011\\11011\end{pmatrix}_{280} \begin{pmatrix}11111\\11011\\11011\\11011\\11011\end{pmatrix}_{281}$$

$$\begin{pmatrix}11011\\11111\\11011\\11011\\11011\end{pmatrix}_{282} \begin{pmatrix}11011\\11011\\11111\\11011\\11011\end{pmatrix}_{283} \begin{pmatrix}11111\\11011\\11111\\11011\\11011\end{pmatrix}_{284} \begin{pmatrix}11011\\11011\\11011\\11111\\11011\end{pmatrix}_{285} \begin{pmatrix}11111\\11011\\11011\\11111\\11011\end{pmatrix}_{286} \begin{pmatrix}11011\\11011\\11111\\11111\\11011\end{pmatrix}_{287} \begin{pmatrix}11111\\11011\\11111\\11111\\11011\end{pmatrix}_{288} \begin{pmatrix}10111\\10111\\10111\\10111\\10111\end{pmatrix}_{289} \begin{pmatrix}11111\\10111\\10111\\10111\\10111\end{pmatrix}_{290}$$

$$\begin{pmatrix}10111\\11111\\10111\\10111\\10111\end{pmatrix}_{291} \begin{pmatrix}10111\\10111\\11111\\10111\\10111\end{pmatrix}_{292} \begin{pmatrix}11111\\10111\\11111\\10111\\10111\end{pmatrix}_{293} \begin{pmatrix}10111\\10111\\10111\\11111\\10111\end{pmatrix}_{294} \begin{pmatrix}11111\\10111\\10111\\11111\\10111\end{pmatrix}_{295} \begin{pmatrix}10111\\10111\\11111\\11111\\10111\end{pmatrix}_{296} \begin{pmatrix}11111\\10111\\11111\\11111\\10111\end{pmatrix}_{297} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01001\\01111\end{pmatrix}_{298} \begin{pmatrix}01111\\01001\\01001\\01001\\01111\end{pmatrix}_{299}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01001\\01111\end{pmatrix}_{300} \begin{pmatrix}01011\\01011\\01011\\01011\\01111\end{pmatrix}_{301} \begin{pmatrix}01111\\01011\\01011\\01011\\01111\end{pmatrix}_{302} \begin{pmatrix}11111\\01011\\01011\\01011\\01111\end{pmatrix}_{303} \begin{pmatrix}01110\\01110\\01110\\01110\\01111\end{pmatrix}_{304} \begin{pmatrix}01111\\01110\\01110\\01110\\01111\end{pmatrix}_{305} \begin{pmatrix}11111\\01110\\01110\\01110\\01111\end{pmatrix}_{306} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01101\\01101\\01111\end{pmatrix}_{307} \begin{pmatrix}01111\\01101\\01101\\01101\\01111\end{pmatrix}_{308}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01101\\01101\\01101\\01111\end{pmatrix}_{309} \begin{pmatrix}01111\\01111\\01111\\01111\\01111\end{pmatrix}_{310} \begin{pmatrix}11111\\01111\\01111\\01111\\01111\end{pmatrix}_{311} \begin{pmatrix}01111\\11111\\01111\\01111\\01111\end{pmatrix}_{312} \begin{pmatrix}01111\\01111\\11111\\01111\\01111\end{pmatrix}_{313} \begin{pmatrix}11111\\01111\\11111\\01111\\01111\end{pmatrix}_{314} \begin{pmatrix}01111\\01111\\01111\\11111\\01111\end{pmatrix}_{315} \begin{pmatrix}11111\\01111\\01111\\11111\\01111\end{pmatrix}_{316} \begin{pmatrix}01111\\01111\\11111\\11111\\01111\end{pmatrix}_{317}$$

$$\begin{pmatrix}11111\\01111\\11111\\11111\\01111\end{pmatrix}_{318} \begin{pmatrix}01001\\01001\\01001\\01001\\11111\end{pmatrix}_{319} \begin{pmatrix}11111\\01001\\01001\\01001\\11111\end{pmatrix}_{320} \begin{pmatrix}01011\\01011\\01011\\01011\\11111\end{pmatrix}_{321} \begin{pmatrix}11111\\01011\\01011\\01011\\11111\end{pmatrix}_{322} \begin{pmatrix}01110\\01110\\01110\\01110\\11111\end{pmatrix}_{323} \begin{pmatrix}11111\\01110\\01110\\01110\\11111\end{pmatrix}_{324} \begin{pmatrix}01101\\01101\\01101\\01101\\11111\end{pmatrix}_{325} \begin{pmatrix}11111\\01101\\01101\\01101\\11111\end{pmatrix}_{326}$$

$$\begin{pmatrix}11011\\11011\\11011\\11011\\11111\end{pmatrix}_{327} \begin{pmatrix}11111\\11011\\11011\\11011\\11111\end{pmatrix}_{328} \begin{pmatrix}10111\\10111\\10111\\10111\\11111\end{pmatrix}_{329} \begin{pmatrix}11111\\10111\\10111\\10111\\11111\end{pmatrix}_{330} \begin{pmatrix}01111\\01111\\01111\\01111\\11111\end{pmatrix}_{331} \begin{pmatrix}11111\\01111\\01111\\01111\\11111\end{pmatrix}_{332} \begin{pmatrix}11111\\11111\\11111\\11111\\11111\end{pmatrix}_{333}$$

მაგალითი ვთქვათ $=\{ \qquad \} = \breve{}$ და

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \{8\},\ P_1 = \{1\},\\
&P_2 = \{2\},\ P_3 = \{3\},\\
&P_4 = \{4\},\ P_5 = \{5\},\\
&P_6 = \{6\},\ P_7 = \{7\}
\end{aligned}
.
$$

მაშინ

$$\breve{} = \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \}$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \},$$

$$= \{ \qquad \}$$

და

$$
\begin{aligned}
D = \{&\{2,5,8\},\{2,4,5,7,8\},\ \{2,3,4,6,7,8\},\{2,3,5,6,7,8\},\\
&\{1,2,4,5,6,7,8\},\{1,3,4,5,6,7,8\},\ \{2,3,4,5,6,7,8\},\ \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}.
\end{aligned}
$$

ამ შემთხვევაში $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების რაოდენობა გვექნება:

$|R^*(Q_1)|=8$, $\left|R^*(Q_2)\right| = 510$, $\left|R^*(Q_3)\right| = 935$, $\left|R^*(Q_4)\right| = 111$, $\left|R^*(Q_5)\right| = 104$, $\left|R^*(Q_6)\right| = 6$, $\left|R^*(Q_7)\right| = 12$

$\left|R^*(Q_8)\right| = 1$ ე.ი. $|R_D| = 1687$.

$$
\begin{pmatrix}11111111\\11111111\\11111111\\11111111\\11111111\\11111111\\11111111\\11111111\end{pmatrix}_1
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_2
\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_3
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_4
\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_5
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_6
\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_7
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_8
$$

$$
\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_9
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_{10}
\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_{11}
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_{12}
\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_{13}
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_{14}
\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_{15}
\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_{16}
$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\end{pmatrix}_{17} \begin{pmatrix}11111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{18} \begin{pmatrix}01111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{19} \begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{20} \begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{21} \begin{pmatrix}11111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{22} \begin{pmatrix}01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{23}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{24} \begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{25} \begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{26} \begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{27} \begin{pmatrix}11111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{28} \begin{pmatrix}01111111\\01111111\\11111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{29} \begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{30}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{31} \begin{pmatrix}11111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{32} \begin{pmatrix}01111111\\01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{33} \begin{pmatrix}01111111\\11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{34} \begin{pmatrix}11111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{35} \begin{pmatrix}01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\\01111111\end{pmatrix}_{36} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{37}$$

$$\begin{pmatrix}10111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{38} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{39} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{40} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{41} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{42} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{43} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{44}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{45} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{46} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{47} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{48} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{49} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{50} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{51}$$

$$\begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\end{pmatrix}_{52} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{53} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{54} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{55} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{56} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{57} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{58}$$

$$\begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{59} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{60} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{61} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{62} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{63} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\11111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{64} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{65}$$

$$\begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{66} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{67} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{68} \begin{pmatrix}10111111\\11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{69} \begin{pmatrix}11111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{70} \begin{pmatrix}10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\\10111111\end{pmatrix}_{71} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{72}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{73} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{74} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{75} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{76} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{77} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{78} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{79} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{80}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{81} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{82} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{83} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{84} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{85} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{86} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\end{pmatrix}_{87}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{88} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{89} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{90} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{91} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{92} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{93} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{94}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{95} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{96} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{97} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{98} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{99} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{100} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{101}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{102} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{103} \begin{pmatrix}11011111\\11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{104} \begin{pmatrix}11111111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{105} \begin{pmatrix}11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\\11011111\end{pmatrix}_{106} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\end{pmatrix}_{107} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\end{pmatrix}_{108}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\end{pmatrix}_{109} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\end{pmatrix}_{110} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{111} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{112} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{113} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{114} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{115}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{116} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{117} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{118} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{119} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{120} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\end{pmatrix}_{121} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\end{pmatrix}_{122}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{123} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{124} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{125} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{126} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{127} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{128} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{129}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{130} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{131} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{132} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{133} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{134} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{135} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{136}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{137} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{138} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{139} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{140} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{141} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{142} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{143}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{144} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{145} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{146} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{147} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{148} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{149} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{150}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{151} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{152} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{153} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{154} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{155} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{156} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{157}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{158} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{159} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{160} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{161} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{162} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{163}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{164} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{165} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{166} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{167} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{168} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{169} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{170}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{171} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{172} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{173} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{174} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{175} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{176} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{177}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{178} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{179} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{180} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{181} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{182} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{183} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{184}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{185} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{186} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{187} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\end{pmatrix}_{188} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{189} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{190} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{191}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{192} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{193} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{194} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{195} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{196} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{197} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{198}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{199} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{200} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{201} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{202} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{203} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{204} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{205}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{206} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{207} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{208} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{209} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{210} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{211} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{212}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{213} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{214} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{215} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{216} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{217} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{218} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{219}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{220} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{221} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{222} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{223} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{224} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{225} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{226}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{227} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{228} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{229} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{230} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{231} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{232} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{233}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{234} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{235} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{236} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{237} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{238} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{239} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{240}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{241} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{242} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{243} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{244} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{245} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{246} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{247}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{248} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{249} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{250} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{251} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{252} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{253} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{254}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{255} \begin{pmatrix}01101111\\11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{256} \begin{pmatrix}01101111\\01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{257} \begin{pmatrix}11111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{258} \begin{pmatrix}01111111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{259} \begin{pmatrix}01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\\01101111\end{pmatrix}_{260} \begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\11111111\\01110111\\11111111\\11111111\\01110111\end{pmatrix}_{261}$$

$$\begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{262} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{263} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{264} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{265} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{266} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{267} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{268}$$

$$\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{269} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{270} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{271} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{272} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{273} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{274} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{275}$$

$$\begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{276} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{277} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{278} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{279} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{280} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{281} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{282}$$

$$\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{283} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{284} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{285} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{286} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{287} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{288} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{289}$$

$$\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{290} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{291} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{292} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{293} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{294} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{295} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{296}$$

$$\begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{297} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{298} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{299} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{300} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{301} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{302} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{303}$$

$$\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{304} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{305} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{306} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{307} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{308} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{309} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{310}$$

$$\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{311} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{312} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{313} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{314} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{315} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{316} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{317}$$

$$\begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{318} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{319} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{320} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{321} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{322} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{323} \begin{pmatrix} 01110111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 11111111 \\ 01110111 \\ 01110111 \\ 01111111 \\ 01110111 \end{pmatrix}_{324}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{325}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{326}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{327}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{328}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{329}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{330}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{331}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{332}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{333}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{334}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{335}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{336}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{337}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{338}$$

$$\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{339}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{340}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{341}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\end{pmatrix}_{342}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\11111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{343}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\11111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{344}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{345}$$

$$\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{346}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{347}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{348}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{349}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{350}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{351}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{352}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{353}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{354}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{355}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{356}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{357}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{358}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{359}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{360}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{361}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{362}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{363}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{364}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{365}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{366}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{367}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{368}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{369}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{370}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{371}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{372}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{373}$$

$$\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{374}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{375}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{376}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{377}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{378}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{379}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{380}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{381}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{382}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{383}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{384}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{385}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{386}\quad\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{387}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{388}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{389}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{390}\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{391}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{392}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{393}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{394}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{395}\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{396}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{397}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{398}\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{399}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{400}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{401}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{402}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{403}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{404}\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{405}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{406}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{407}\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{408}$$

$$\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{409}\begin{pmatrix}01110111\\11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{410}\begin{pmatrix}01110111\\01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{411}\begin{pmatrix}11111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{412}\begin{pmatrix}01111111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{413}\begin{pmatrix}01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\\01110111\end{pmatrix}_{414}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{415}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{416}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{417}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{418}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{419}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{420}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{421}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{422}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{423}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{424}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{425}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{426}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{427}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{428}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{429}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\end{pmatrix}_{430}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{431}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{432}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{433}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{434}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{435}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{436}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{437}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{438}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{439}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{440}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{441}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{442}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{443}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{444}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{445}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{446}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{447}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{448}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{449}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{450}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{451} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{452} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{453} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{454} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{455} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{456} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{457}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{458} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{459} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{460} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{461} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{462} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{463} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{464}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{465} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{466} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{467} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{468} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{469} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{470} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{471}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{472} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{473} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{474} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{475} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{476} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{477} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{478}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{479} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{480} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{481} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{482} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{483} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{484} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{485}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{486} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{487} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{488} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{489} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{490} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{491} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{492}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{493} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{494} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{495} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\end{pmatrix}_{496} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{497} \begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{498} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{499}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{500} \begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{501} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{502} \begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{503} \begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{504} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{505} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{506}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{507} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{508} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{509} \begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{510} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{511} \begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{512} \begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{513}$$

$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{514}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{515}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{516}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{517}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{518}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{519}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{520}$

$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{521}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{522}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{523}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{524}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{525}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{526}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{527}$

$\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{528}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{529}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{530}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{531}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{532}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{533}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{534}$

$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{535}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{536}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{537}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{538}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{539}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{540}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{541}$

$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{542}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{543}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{544}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{545}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{546}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{547}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{548}$

$\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{549}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{550}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{551}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{552}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{553}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{554}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{555}$

$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{556}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{557}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{558}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{559}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{560}$ $\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{561}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\end{pmatrix}_{562}$

$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{563}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{564}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{565}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{566}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{567}$ $\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{568}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{569}$

$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{570}$ $\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{571}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{572}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{573}$ $\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{574}$ $\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{575}$ $\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{576}$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{577}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{578}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{579}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{580}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{581}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{582}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{583}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{584}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{585}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{586}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{587}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{588}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{589}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{590}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{591}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{592}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{593}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{594}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{595}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{596}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{597}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{598}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{599}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{600}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{601}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{602}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{603}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{604}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{605}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01111111\\11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{606}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{607}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{608}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{609}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{610}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{611}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{612}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{613}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{614}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{615}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{616}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{617}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{618}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{619}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{620}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{621}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{622}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{623}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{624}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{625}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{626}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11011111\\01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{627}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{628}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{629}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{630}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{631}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{632}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{633}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{634}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{635}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{636}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{637}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{638}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{639}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{640}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{641}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{642}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{643}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{644}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{645}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{646}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{647}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{648}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{649}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{650}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{651}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{652}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{653}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{654}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{655}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{656}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{657}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{658}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{659}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{660}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{661}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{662}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{663}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{664}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{665}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{666}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{667}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{668}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{669}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{670}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{671}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{672}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{673}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{674}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{675}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11011111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{676}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{677}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{678}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{679}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{680}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{681}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{682}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{683}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{684}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{685}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{686}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01111111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{687}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{688}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{689}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{690}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{691}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{692}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{693}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{694}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{695}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{696}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{697}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{698}\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{699}\begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{700}\begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{701}\begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{702}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{703} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{704} \begin{pmatrix}11011111\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{705} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{706} \begin{pmatrix}01011011\\11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{707} \begin{pmatrix}01011011\\01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{708} \begin{pmatrix}01011011\\11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{709}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{710} \begin{pmatrix}01111111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{711} \begin{pmatrix}11011111\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{712} \begin{pmatrix}01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\\01011011\end{pmatrix}_{713} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{714} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{715} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{716}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{717} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{718} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{719} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{720} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{721} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{722} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{723}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{724} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{725} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{726} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{727} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{728} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\end{pmatrix}_{729} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{730}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{731} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{732} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{733} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{734} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{735} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{736} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{737}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{738} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{739} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{740} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{741} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{742} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{743} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{744}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{745} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{746} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{747} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{748} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{749} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{750} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{751}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{752} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{753} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{754} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{755} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{756} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{757} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{758}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{759} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{760} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{761} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{762} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{763} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{764} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{765}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{766}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{767}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{768}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{769}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{770}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{771}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{772}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{773}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{774}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{775}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{776}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{777}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{778}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{779}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{780}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{781}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{782}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{783}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{784}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{785}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{786}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{787}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{788}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{789}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{790}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{791}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{792}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{793}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{794}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\end{pmatrix}_{795}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{796}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{797}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{798}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{799}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{800}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{801}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{802}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{803}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{804}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{805}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{806}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{807}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{808}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{809}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{810}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{811}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{812}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{813}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{814}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{815}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{816}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{817}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{818}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{819}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{820}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{821}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{822}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{823}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{824}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{825}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{826}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{827}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{828}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{829}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{830}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{831}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{832}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{833}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{834}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{835}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{836}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{837}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{838}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{839}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{840}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{841}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{842}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{843}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{844}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{845}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{846}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{847}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{848}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{849}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{850}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{851}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{852}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{853}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{854}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{855}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{856}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{857}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{858}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{859}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{860}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\end{pmatrix}_{861}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{862}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{863}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{864}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{865}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{866}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{867}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{868}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{869}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{870}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{871}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{872}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{873}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{874}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{875}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{876}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{877}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{878}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{879}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{880}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{881}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{882}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{883}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{884}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{885}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{886}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{887}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{888}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{889}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{890}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{891}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{892}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{893}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{894}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{895}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{896}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{897}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{898}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{899}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{900}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{901}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{902}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{903}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{904}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{905}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{906}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{907}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{908}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{909}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{910}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{911}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{912}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{913}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{914}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{915}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{916}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{917}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{918}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{919}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{920}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{921}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{922}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{923}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{924}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{925}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{926}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{927}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{928}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{929}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{930}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{931}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{932}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{933}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{934} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{935} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{936} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{937} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{938} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{939} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{940}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{941} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{942} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{943} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{944} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{945} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{946} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{947}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{948} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{949} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{950} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{951} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{952} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{953} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{954}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{955} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{956} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{957} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{958} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{959} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{960} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{961}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{962} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{963} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{964} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{965} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{966} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{967} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{968}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{969} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{970} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{971} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{972} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{973} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{974} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{975}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{976} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{977} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{978} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{979} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{980} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{981} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{982}$$

$$
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{983}
\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{984}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{985}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{986}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{987}
\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{988}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{989}
$$

$$
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{990}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{991}
\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{992}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{993}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{994}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{995}
\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{996}
$$

$$
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{997}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{998}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{999}
\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{1000}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\end{pmatrix}_{1001}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1002}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1003}
$$

$$
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1004}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1005}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1006}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1007}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1008}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1009}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1010}
$$

$$
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1011}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1012}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1013}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1014}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1015}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{16}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1017}
$$

$$
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1018}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1019}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1020}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1021}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1022}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{23}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{24}
$$

$$
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1025}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1026}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1027}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1028}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1029}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1030}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1031}
$$

$$
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1032}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1033}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1034}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1035}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1036}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1037}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1038}
$$

$$
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1039}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1040}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1041}
\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1042}
\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1043}
\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1044}
\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1045}
$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1046}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1047}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1048}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1049}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1050}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1051}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1052}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1053}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1054}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1055}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1056}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1057}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1058}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1059}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1060}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1061}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1062}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1063}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1064}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1065}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1066}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1067}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1068}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1069}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1070}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1071}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1072}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1073}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1074}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1075}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1076}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1077}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1078}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1079}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1080}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1081}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1082}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1083}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1084}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1085}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1086}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1087}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1088}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1089}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1090}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1091}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{92}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{93}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1094}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1095}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1096}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1097}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1098}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1099}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1100}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1101}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1102}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1103}\quad\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1104}\quad\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1105}\quad\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1106}\quad\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1107}\quad\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1108}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1109}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1110}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1111}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1112}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1113}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1114}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1115}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1116}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{117}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1118}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1119}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1120}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1121}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1122}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1123}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1124}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1125}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1126}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1127}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1128}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1129}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1130}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1131}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1132}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1133}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1134}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1135}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1136}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1137}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1138}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1139}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1140}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1141}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1142}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1143}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1144}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1145}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1146}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1147}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1148}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1149}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1150}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1151}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1152}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1153}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1154}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1155}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1156}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1157}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1158}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1159}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1160}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1161}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1162}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1163}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1164}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1165}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1166}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{167}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1168}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1169}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1170}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1171}$$

$\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1172}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1173}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1174}$ $\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1175}$ $\begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1176}$ $\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1177}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1178}$

$\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1179}$ $\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1180}$ $\begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1181}$ $\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1182}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1183}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1184}$ $\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1185}$

$\begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1186}$ $\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1187}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1188}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1189}$ $\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1190}$ $\begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1191}$ $\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1192}$

$\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1193}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1194}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1195}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1196}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1197}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1198}$ $\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1199}$

$\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1200}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1201}$ $\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1202}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1203}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1204}$ $\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1205}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1206}$

$\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1207}$ $\begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1208}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1209}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1210}$ $\begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1211}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1212}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1213}$

$\begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1214}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1215}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1216}$ $\begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1217}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1218}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1219}$ $\begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1220}$

$\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1221}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1222}$ $\begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1223}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1224}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1225}$ $\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1226}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1227}$

$\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1228}$ $\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1229}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1230}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1231}$ $\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1232}$ $\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1233}$ $\begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1234}$

$$\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1235} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1236} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1237} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1238} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1239} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1240} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1241}$$

$$\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1242} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1243} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1244} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1245} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1246} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1247} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1248}$$

$$\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1249} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1250} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1251} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1252} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1253} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1254} \begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1255}$$

$$\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1256} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1257} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1258} \begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1259} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1260} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1261} \begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1262}$$

$$\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1263} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1264} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1265} \begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1266} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1267} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1268} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1269}$$

$$\begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1270} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1271} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1272} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1273} \begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1274} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1275} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1276}$$

$$\begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1277} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1278} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1279} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1280} \begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1281} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1282} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1283}$$

$$\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1284} \begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1285} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1286} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1287} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1288} \begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1289} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1290}$$

$$\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1291} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1292} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1293} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1294} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1295} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1296} \begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1297}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1298} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1299} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1300} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1301} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1302} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1303} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1304}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1305} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11011111\\01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1306} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1307} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1308} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1309} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1310} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1311}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1312} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1313} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1314} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1315} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1316} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1317} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1318}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1319} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1320} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1321} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1322} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1323} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11011111\\01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1324} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1325}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1326} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1327} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1328} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1329} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1330} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1331} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1332}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1333} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1334} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1335} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1336} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1337} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1338} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1339}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1340} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1341} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1342} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1343} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1344} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1345} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1346}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1347} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1348} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1349} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1350} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1351} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1352} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1353}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1354} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1355} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1356} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1357} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1358} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1359} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1360}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1361}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1362}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1363}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1364}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1365}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1366}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1367}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1368}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1369}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1370}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1371}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1372}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1373}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1374}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1375}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1376}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1377}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1378}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1379}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1380}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1381}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1382}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1383}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1384}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1385}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1386}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1387}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1388}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1389}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1390}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1391}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1392}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1393}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1394}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1395}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1396}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1397}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1398}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1399}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1400}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1401}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1402}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1403}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1404}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1405}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1406}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1407}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1408}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1409}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1410}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1411}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1412}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1413}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1414}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1415}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1416}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1417}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1418}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1419}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1420}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1421}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1422}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1423}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1424}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1425}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1426}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1427}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1428}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1429}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1430}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1431}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1432}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1433}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1434}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1435}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1436}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1437}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1438}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1439}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1440}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1441}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1442}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1443}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1444}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1445}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1446}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1447}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1448}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1449}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1450}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1451}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1452}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1453}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1454}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1455}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1456}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1457}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1458}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1459}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1460}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1461}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1462}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1463}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1464}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1465}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1466}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1467}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1468}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1469}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1470}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1471}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1472}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1473}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1474}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1475}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1476}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1477}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1478}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1479}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1480}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1481}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1482}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1483}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1484}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1485}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1486}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1487}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1488}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1489}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1490}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1491}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1492}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1493}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1494}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1495}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1496}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1497}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1498}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1499}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1500}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1501}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1502}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1503}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1504}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1505}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1506}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1507}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1508}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1509}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1510}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1511}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{512}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{513}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{514}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1515}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1516}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1517}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1518}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1519}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1520}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1521}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1522}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1523}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1524}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1525}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11011111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1526}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1527}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1528}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1529}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1530}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1531}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1532}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1533}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1534}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1535}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1536}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1537}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1538}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1539}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1540}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1541}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1542}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1543}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1544}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1545}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1546}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1547}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1548}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1549}$$

$$\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1550}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1551}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1552}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1553}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1554}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1555}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1556}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1557}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1558}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1559}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1560}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1561}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1562}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1563}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1564}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1565}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1566}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1567}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1568}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1569}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1570}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11011111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1571}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1572}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1573}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1574}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1575}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1576}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1577}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1578}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1579}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1580}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1581}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1582}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1583}\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1584}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1585}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1586}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1587}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1588}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1589}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1590}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1591}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1592}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1593}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1594}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1595}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1596}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1597}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1598}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1599}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1600}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1601}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1602}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1603}\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1604}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1605}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1606}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1607}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1608}\begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1609}\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1610}\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1611}\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1612}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1613} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1614} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1615} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1616} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1617} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1618} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1619}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1620} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1621} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1622} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1623} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1624} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1625} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1626}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1627} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\end{pmatrix}_{1628} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1629} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1630} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1631} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1632} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1633}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1634} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1635} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1636} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1637} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1638} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1639} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1640}$$

$$\begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01011011\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1641} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1642} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1643} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1644} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1645} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1646} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1647}$$

$$\begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1648} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1649} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1650} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1651} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1652} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1653} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1654}$$

$$\begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1655} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1656} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1657} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01111111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1658} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1659} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1660} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1661}$$

$$\begin{pmatrix}01101111\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1662} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1663} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\11011111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1664} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1665} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1666} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1667} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1668}$$

$$\begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1669} \begin{pmatrix}01001001\\01001001\\01101111\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1670} \begin{pmatrix}11111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1671} \begin{pmatrix}01111111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1672} \begin{pmatrix}11011111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1673} \begin{pmatrix}01101111\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1674} \begin{pmatrix}01011011\\01001001\\01011011\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\\01001001\end{pmatrix}_{1675}$$

$$\begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1676} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1677} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1678} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 11011111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1679} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01101111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1680} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1681} \begin{pmatrix} 11111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1682}$$

$$\begin{pmatrix} 01111111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1683} \begin{pmatrix} 11011111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1684} \begin{pmatrix} 01101111 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1685} \begin{pmatrix} 01011011 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1686} \begin{pmatrix} 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \\ 01001001 \end{pmatrix}_{1687}$$