ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელნაწერის უფლებით

ნინო ცინარიძე

$\sum_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის ანოტაცია

სპეციალობა-მათემატიკა

ათუმი
2017

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში.

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

იაშა დიასამიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი.

უცხოელი შემფასებლები:

ნეშეთ აიდინი

პროფესორი, ჩანაქკალეს 18 მარტის უნივერსიტეტი.

ალი ერდოღანი

პროფესორი, ჰაჯეტეპეს უნივერსიტეტი.

შემფასებლები:

მიხეილ ამაღლობელი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოც. პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი.

თენგიზ ბოკელავაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოც. პროფესორი, აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი.

გულად ფარტენაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოც. პროფესორი, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი.

სადისერტაციო ნაშრომის დაცვა შედგება 2017 წლის 18 თებერვალს, 14^{00} საათზე, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე.

მისამართი: ბათუმი, ნინოშვილის ქ.№35, უნივერსიტეტის პირველი კორპუსი, მესამე სართული, დარბაზი №55.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში და ვებ-გვერდზე www.bsu.edu.ge

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული მდივანი,
ასოცირებული პროფესორი დალი მახარაძე

თემის აქტუალობა

ნახევარჯგუფთა თეორია არის თანამედროვე ალგებრის ერთ-ერთი აქტიურად განვითარებადი დარგი. მას მჭიდრო კავშირი აქვს სხვადასხვა მათემატიკურ დისციპლინებთან: დიფერენციალურ გეომეტრიასთან, ფუნქციონალურ ანალიზთან, გრაფთა, ავტომატთა და ალგორითმთა აბსტრაქტულ თეორიებთან.

ნახევარჯგუფთა თეორიაში მთელი რიგი მნიშვნელოვანი შედეგები დაკავშირებულია ბინარულ მიმართებათა ნახევარ-ჯგუფებთან: კელის განზოგადებული თეორემა, კ.ა. ზარეცკის თეორემა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის განსაზღვრის შესახებ მჭიდროდ ჩადგმული იდეალებით, შაინ-მაკენზის თეორემა ნებისმიერი ნახევარჯგუფის ბინარული მიმართებებით ზუსტი ტრანზიტული წარმოდგენის შესახებ. შაინის, შვარცის, ტამურას, კლიფორდის, ბათლერის შედეგები და სხვა.

ვინაიდან ნებისმიერი ნახევარჯგუფი შეიძლება იზომორფულად ჩავდგათ ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფში, რომლებიც განსაზღვრულია გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერით, ამიტომ მოცემული ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფთა შესწავლით ზოგადად ნახევარჯგუფები შეისწავლება. გარდა ამისა, იდემპო-ტენტური ელემენტები, ცალმხრივი ერთეულები, გარე ელემენტები უდიდეს როლს თამაშობენ ნახევარჯგუფის აბსტრაქტული თვისებების შესწავლაში.

ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის შესწავლის სირთულე დაკავშირებულია იმასთან, რომ ისინი როგორც წესი არ წარმოადგენენ რეგულარულ ნახევარჯგუფებს, რაც ტექნიკურად აძნელებს მათ შესწავლას. ამასთან დაკავშირებით მეტად საინტერესო აღმოჩნდა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფებისა და მათი ზოგიერთი მნიშვნელოვანი კლასების სისტემატური შესწავლა გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერების გამოყენებით, რომელიც პირველად გამოყენებული იქნა იაშა დიასამიძის მიერ თავის სადისერტაციო ნაშრომში. ეს არის ახალი მიმართულება, რომელიც მოკლედ ასე აღიწერება:

კერძოდ, D სიმბოლოთი აღვნიშნოთ არაცარიელი X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი არაცარიელი სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია D სიმრავლის ელემენტების თეორიულ

სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციის მიმართ. მას გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერი ეწოდება. f იყოს X სიმრავლის D სიმრავლეში ნებისმიერი ასახვა. ყოველ ასეთ f ასახვას შევუსაბამოთ $\alpha_f = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x) \right)$ ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე. ყველა ასეთი α_f $\left(f : X \to D \right)$ ბინარული მიმართებების სიმრავლე აღვნიშნოთ $B_X(D)$ სიმბოლოთი. მტკიცდება, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფია. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი ეწოდება.

ვთქვათ $\Sigma_n(X,m)$ არის m სიმძლავრის მქონე ყველა გაერთიანებათა სრული ნახევარმესერების კლასი. $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ისეთი ელემენტებია $\Sigma(X,m)$ კლასიდან, რომელთაგან არცერთი ორი ერთმანეთის იზომორფული არ არის. საზოგადოდ $\Sigma_k(X,m)$ სიმბოლოთი აღინიშნება $\Sigma(X,m)$ კლასის ქვეკლასი, რომლის ყოველი ელემენტი იზომორფულია ფიქსირებული D_k $(1 \le k \le n)$ გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერისა.

გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერების გამოყენებით ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების შესწავლაში და მიღებული შედეგების გავრცელების საქმეში დიდი წვლილი აქვს შეტანილი შ. მახარაძეს. ამ მიმართულებით ფიზიკა-მატემატიკის მეცნიერებათა ხარისხები დაიცვეს ზ. ავალიანმა, გ. ფარტენაძემ, ო. გივრაძემ, ნ. როყვამ, მათემატიკის აკადემიური დოქტორის ხარისხები თურქეთის რესპუბლიკაში დაიცვეს აგრეთვე დ. იეშილმა და ბ. ალბაირაკმა.

შრომის მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი მიზანია იმ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების შესწავლა, რომლებიც განსაზღვრული არიან $\Sigma_2(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებით. კვლევის საგანს წარმოადგენს $\Sigma_2(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერები, რადგანაც მოცემული ნახევარმესერები,

როგორც შემდგომში კვლევები გვიჩვენებენ, ატარებენ მნიშვნელოვან ინფორმაციას იმ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების შესახებ, რომლებსაც ისინი განსაზღვრავენ. აგრეთვე კვლევის საგანს წარმოადგენენ მოცემული ნახევარმესერებით განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები.

შრომის მეცნიერული სიახლე

ნაშრომში პირველად განიხილება იმ ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის კლასები, რომლებიც განსაზღვრულია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასის ნახევარმესერებით. გამოკვლეულია მოცემული კლასის ნახევარმესერების თვისებები შესაბამისი დიაგრამის მიხედვით.

როცა X სასრული სიმრავლეა, გამოყვანილია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასში ნახევარმესერების რაოდენობის დათვლის ფორმულა, აღწერილია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასის ყველა ქვენახევარმესერები და გამოყოფილია მათგან $XI-$ ქვენახევარმესერები.

შესწავლილია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასის ყოველი D ნახევარმესერით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფების მარჯვენა ერთეულები, იდემპოტენტური ელემენტები, მაქსიმალური ქვეჯგუფები, რეგულარული ელემენტები და მათი თვისებები, როცა X სასრული სიმრავლეა, გამოყვანილია იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტების რაოდენობის დათვლის ფორმულები.

აღნიშნული საკითხების შესწავლა ეყრდნობა გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერის თვისებებს. აღმოჩნდა, რომ ნახევარჯგუფთა კლასების ამ მეთოდით შესწავლა ძალიან ეფექტურია. ნაშრომში მიღებული შედეგები კი საშუალებას იძლევიან ამ ნახევარჯგუფის განმსაზღვრელი ნახევარმესერის დიაგრამაზე დაყრდნობით ვილაპარაკოთ მოცემული ნახევარჯგუფის დამახასიათებელ მრავალ თვისებაზე. კერძოდ, გააჩნია თუ არა ნახევარჯგუფს მარჯვენა ერთეულები, როგორაა აგებული მისი იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები, მაქსიმალური ქვეჯგუფები და სხვა.

გამოკვლევის ძირითადი მეთოდები

როგორც ცნობილია ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები, ცალმხრივი ერთეულები, რეგულარული ელემენტები, მაქსიმალური ქვეჯგუფები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ნახევარჯგუფთა აბსტრაქტული თვისებების შესწავლაში. გამომდინარე აქედან, ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების კლასების შესწავლისას დიდი ყურადღება ექცევა ნახევარჯგუფში ზემოთ ჩამოთვლილი საკითხების შესწავლას.

სადისერტაციო ნაშრომში ნახევარჯგუფთა თვისებების შესწავლა ხდება ნახევარმესერთა თვისებების საშუალებით. ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების მნიშვნელოვანი ნაწილი ძირითადად განისაზღვრება იმ გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერებით, რომლებიც განსაზღვრავენ მოცემული კლასის ელემენტებს.

ნაშრომში გამოიყენება მესერთა თეორიის, ნახევარჯგუფთა თეორიის, სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ზოგადი მეთოდი.

ნაშრომის პრაქტიკული და თეორიული ღირებულება

სადისერტაციო ნაშრომი ატარებს ძირითადად თეორიულ ხასიათს. ნაშრომში მიღებული შედეგები შეიძლება შემდგომ გამოყენებული იქნას ნახევარჯგუფთა და ნახევარმესერთა გამოკვლევებში.

დისერტაციის სტრუქტურა და მოცულობა

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, 3 თავის, 18 პარაგრაფისა და 7 დანართისაგან. ნაშრომის საერთო მოცულობა არის კომპიუტერით დაკაბადონებული 329 გვერდი.

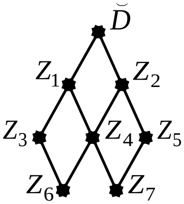
ნაშრომის საერთო დახასიათება

თავი I. $\Sigma_2(\mathbf{X},8)$ კლასის ნახევარმესერების ქვენახევარმესერები.

ამ თავში განმარტებულია $\Sigma_2(X,8)$ კლასი, როცა X სასრული სიმრავლეა გამოყვანილია მოცემული კლასის ნახევარმესერების რაოდენობის დათვლის ფორმულა, აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერები და მათგან გამოყოფილია XI – ქვენახევარმესერები.

ვთქვათ X არაცარიელი სიმრავლეა. $\Sigma_2(X,8)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ გაერთიანების $X-$ნახევარმესერთა კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი რომელიღაც $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ გაერთიანების $X-$ნახევარმესერის იზომორფულია და რომელიც მოცემულია ნახაზი 1-ზე.

ვთქვათ $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ და $C(D)=\{P_7,P_6,P_5,P_4,P_3,P_2,P_1,P_0\}$ არის X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ქვესიმრავლეთა რაღაც სიმრავლე და $\psi=\begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ P_7 & P_6 & P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}$ არის ასახვა D ნახევარმესერისა $C(D)$ სიმრავლეში, მაშინ მოცემული ნახევარმესერის ელემენტებისათვის ფორმალურ ტოლობებს ექნებათ შემდეგი სახე:



$$\begin{aligned}
\breve{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7\\
Z_1 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7\\
Z_2 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7\\
Z_3 &= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7\\
Z_4 &= P_0 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7\\
Z_5 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7\\
Z_6 &= P_0 \cup P_5 \cup P_7\\
Z_7 &= P_0 \cup P_3 \cup P_6
\end{aligned}$$

ნახაზი 1.

სადაც P_1,P_2,P_3,P_5 ელემენტები არიან D ნახევარმესერის ბაზისური წყაროები, ხოლო P_0, P_4, P_6, P_7- სისავსის წყაროები. ამიტომ $|X|\ge 4$ და $\delta=4$.

ლემა 1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $|\Sigma_2(X,8)|=s$ და $|X|\ge\delta\ge 4$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $s=\frac{1}{2}\cdot\left(9^n-4\cdot 8^n+6\cdot 7^n-4\cdot 6^n+5^n\right)$.

ახლა აღვწეროთ $\Sigma_2(X,8)$ კლასის $XI-$ქვენახევარმესერები. გამოიყოფა 6 შემთხვევა, ესენია:

1) $Z_7\cap Z_6\ne\varnothing$; **2)** $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\ne\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\ne\varnothing$;

3) $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\ne\varnothing$; **4)** $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\ne\varnothing$;

5) $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\ne\varnothing$; **6)** $Z_5\cap Z_3=\varnothing$.

შემდგომში თითოეული შემთხვევისთვის ცალ-ცალკეა აღწერილი მოცემული კლასის XI-ქვენახევარმესერები.

ლემა 2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$, მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერი:

1) $\{\breve{D}\},\{Z_1\},\{Z_2\},\{Z_3\},\{Z_4\},\{Z_5\},\{Z_6\},\{Z_7\}$ (იხ. დიაგრამა1 ნახ. 2-ზე);

2) $\{Z_7,Z_5\},\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_2\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4\},\{Z_6,Z_3\},\{Z_6,Z_2\},$ $\{Z_6,Z_1\},\{Z_6,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,Z_1\},$ $\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა2 ნახაზი2-ზე);

3) $\{Z_7,Z_5,Z_2\},\{Z_7,Z_5,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_2,\breve{D}\},$ $\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_2\},\{Z_6,Z_4,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1\},$ $\{Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა3 ნახაზი2-ზე);

4) $\{Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\},$ $\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა4 ნახაზი2-ზე);

5) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},$ $\{Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა5 ნახაზი2-ზე);

6) $\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი2-ზე);

7) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი2-ზე);

8) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი2-ზე).

ლემა 3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$, მაშინ ლემა 2-ისა და შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ქვენახევარმესერი:

9) $\{Z_7,Z_6,Z_4\}$ (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი2-ზე);

10) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_6,Z_4,\breve{D}\}$ (იხ.დიაგრამა10 ნახ.2-ზე);

11) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა11 ნახაზი2-ზე);

12) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა12 ნახაზი2-ზე).

ლემა 4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$, მაშინ ლემა 3-ისა და შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ქვენახევარმესერი:

9) $\{Z_7,Z_6,Z_4\},\{Z_7,Z_3,Z_1\}$ (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი2-ზე);

10) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_6,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$
(იხ. დიაგრამა10 ნახაზი2-ზე);

13) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\}$ (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი2-ზე);

14) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა14 ნახაზი2-ზე);

15) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა15 ნახაზი2-ზე).

ლემა 5. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, მაშინ ლემა 3-ისა და შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარ-მესერის ყველა $XI-$ქვენახევარმესერი:

9) $\{Z_7,Z_6,Z_4\},\{Z_6,Z_5,Z_2\}$ (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი2-ზე);

10) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_6,Z_4,\breve{D}\},\{Z_6,Z_5,Z_2,\breve{D}\}$
(იხ. დიაგრამა10 ნახაზი2-ზე);

13) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2\}$ (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი2-ზე);

14) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა14 ნახაზი2-ზე);

15) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა15 ნახაზი2-ზე).

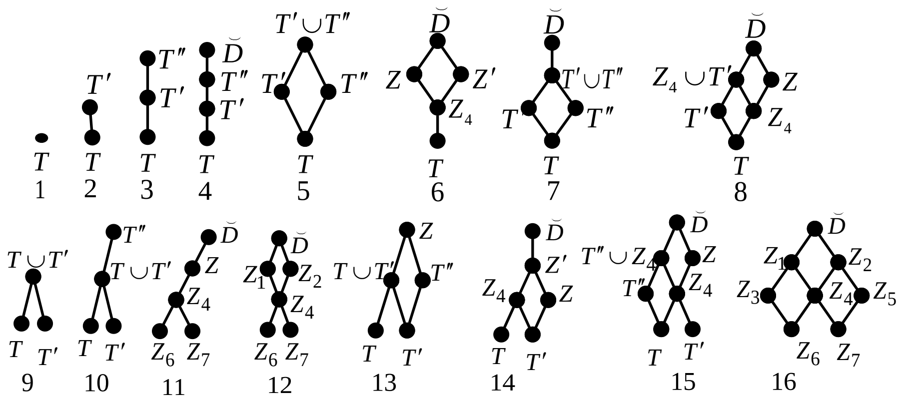
ლემა 6. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\neq\varnothing$, მაშინ ლემა 4-ისა და ლემა 5-ის ნახევარმესერებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ქვენახევარმესერი.

ლემა 7. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_5\cap Z_3=\varnothing$, მაშინ ლემა 6-ისა და შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ქვენახევარმესერი:

9) $\{Z_7,Z_6,Z_4\},\{Z_7,Z_3,Z_1\},\{Z_6,Z_5,Z_2\},\{Z_5,Z_3,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა9 ნახ. 2-ზე);

13) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2\},\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$
(იხ. დიაგრამა13 ნახაზი2-ზე);

16) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (იხ. დიაგრამა16 ნახაზი2-ზე);



ნახაზი 2.

თავი II. იდემპოტენტური ელემენტები. ამ თავში მოცემულია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტების სრული აღწერა. აგრეთვე, როცა X არის სასრული სიმრავლე, გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დათვლილია მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობა.

ვთქვათ $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_2(X,8)$, Q_i $(i=1,2,3,\ldots,16)$ სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები:

1) $Q_1=\{T\}$, სადაც $T\in D$ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი 2-ზე);

2) $Q_2=\{T,T'\}$, სადაც $T,T'\in D$ და $T\subset T'$ (იხ. დიაგრამა2 ნახ. 2-ზე);

3) $Q_3=\{T,T',T''\}$, სადაც $T,T',T''\in D$ და $T\subset T'\subset T''$ (იხ. დიაგრამა 3 ნახაზი 2-ზე);

4) $Q_4=\{T,T',T'',\breve{D}\}$, სადაც $T,T',T''\in D$ და $T\subset \check{T}\subset \check{T}'\subset$ (იხ. დიაგრამა 4 ნახაზი 2-ზე);

5) $Q_5=\{T,T',T'',T'\cup T''\}$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$ და $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 5 ნახაზი 2-ზე);

6) $Q_6=\{T,Z_4,Z,Z',\breve{D}\}$, სადაც $T\in\{Z_7,Z_6\}$, $Z,Z'\in\{Z_2,Z_1\}$, $Z\neq Z'$ და $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 6 ნახაზი 2-ზე);

7) $Q_7=\{T,T',T'',T'\cup T'',\breve{D}\}$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$ და $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 7 ნახაზი 2-ზე);

8) $Q_8=\left\{T,T',Z_4,Z_4\cup T',Z,\breve{D}\right\}$, სადაც $T\in\left\{Z_7,Z_6\right\}$, $T'\in\left\{Z_5,Z_3\right\}$, $T\subset T'$, $Z_4\cup T'$, $Z\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$, $Z_4\cup T'\neq Z$, $T'\setminus Z_4\neq\varnothing$, $Z_4\setminus T'\neq\varnothing$ და $\left(Z_4\cup T'\right)\setminus Z\neq\varnothing$, $Z\setminus\left(Z_4\cup T'\right)\neq\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 8 ნახ. 2-ზე);

9) $Q_9=\left\{T,T',T\cup T'\right\}$, სადაც $T,T'\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ და $T\cap T'=\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 9 ნახაზი 2-ზე);

10) $Q_{10}=\left\{T,T',T\cup T',T''\right\}$, სადაც $T,T',T''\in D$, $\left(T\cup T'\right)\subset T''$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ და $T\cap T'=\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 10 ნახაზი 2-ზე);

11) $Q_{11}=\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z,\breve{D}\right\}$, სადაც $Z\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$ და $Z_7\cap Z_6=\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 11 ნახაზი 2-ზე);

12) $Q_{12}=\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, სადაც $Z_7\cap Z_6=\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 12 ნახაზი2-ზე);

13) $Q_{13}=\left\{T,T',T\cup T',T'',Z\right\}$, სადაც $T,T',T'',Z\in D$, $\left(T\cup T'\right)\subset Z$, $T'\subset T''\subset Z$, $\left(T\cup T'\right)\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus\left(T\cup T'\right)\neq\varnothing$ და $T\cap T''=\varnothing$ (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი2-ზე);

14) $Q_{14}=\left\{T,T',Z_4,Z,Z',\breve{D}\right\}$, სადაც $T,T',Z,Z'\in D$, $T,T'\in\left\{Z_7,Z_6\right\}$, $T\neq T'$, $Z_4\subset Z'\subset\breve{D}$, $T'\subset Z\subset Z'$, $Z_4\setminus Z\neq\varnothing$, $Z\setminus Z_4\neq\varnothing$ და $T\cap Z=\varnothing$ (იხ. დიაგ-რამა 14 ნახაზი 2-ზე);

15) $Q_{15}=\left\{T',T,Z_4,T'',Z,T''\cup Z_4,\breve{D}\right\}$, სადაც $T,T'\in\left\{Z_7,Z_6\right\}$, $T\neq T'$, $T\subset T''$, $T''\in\left\{Z_5,Z_3\right\}$, $Z_4\subset Z$, $\left(T''\cup Z_4\right)\cup Z=\breve{D}$, $T''\setminus Z_4\neq\varnothing$, $Z_4\setminus T''\neq\varnothing$, $\left(T''\cup Z_4\right)\setminus Z\neq\varnothing$ $Z\setminus\left(T''\cup Z_4\right)\neq\varnothing$ და $T'\cap T''=\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 15 ნახაზი 2-ზე);

16) $Q_{16}=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, სადაც $Z_5\cap Z_3=\varnothing$ (იხ. დიაგრამა 16 ნახაზი 2-ზე).

იდემპოტენტური ელემენტების აღწერამდე გამოყვანილია $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ ნახევარმესერით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეულის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები და როცა X სასრული სიმრავლეა გამოყვანილია მათი რაოდენობის დათვლის ფორმულა.

ლემა 8. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ არის $XI-$ნახევარმესერი. მაშინ α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ

წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha=\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)\cup\bigcup_{i=1}^{7}\left(Y_i^\alpha\times Z_i\right)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha,Y_3^\alpha\notin\{\varnothing\}$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_7^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_6^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq Z_3,$$
$$Y_5^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing.$$

ლემა 9. ვთქვათ $D\in\sum_2(X,8)$, $Z_5\cap Z_3=\varnothing$ და $E_X^{(r)}(D)$ სიმრავლე არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$\left|E_X^{(r)}(D)\right|=\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 8^{|X\setminus\breve{D}|}$$

1. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$.

თეორემა 1.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$ და $\alpha\in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha=X\times T$, სადაც $T\in D$;

2) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$, სადაც $T,T'\in D$, $T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$;

3) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''\subset\breve{D}$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times T'\cup T''\right)$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

6) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $T\in\{Z_7,Z_6\}$, $Z,Z'\in\{Z_2,Z_1\}$, $Z\neq Z'$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_4^\alpha,Y_Z^\alpha,Y_{Z'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z$, $Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_Z^\alpha\cap Z_Z\neq\varnothing$, $Y_{Z'}^\alpha\cap Z'\neq\varnothing$;

7) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times\left(T'\cup T''\right)\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

8) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_{T'\cup Z_4}^\alpha\times\left(T'\cup Z_4\right)\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $T\in\{Z_7,Z_6\}$, $T'\in\{Z_5,Z_3\}$, $T\subset T'$, $Z_4\cup T'$, $Z\in\{Z_2,Z_1\}$, $Z_4\cup T'\neq Z$, $T'\setminus Z_4\neq\varnothing$, $Z_4\setminus T'\neq\varnothing$, $\left(Z_4\cup T'\right)\setminus Z\neq\varnothing$, $Z\setminus\left(Z_4\cup T'\right)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_4^\alpha,Y_Z^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_Z^\alpha\cap Z\neq\varnothing$;

ლემა 1.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_1)\right|$-ის სიმძლავრე $\left|I^*(Q_1)\right|=8.$

ლემა 1.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_2)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_2)\right|=&\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\\&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\\&+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\\&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_5|}\end{aligned}$$

ლემა 1.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული

სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*\left(Q_3\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_3\right)\right| = &\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}\end{aligned}$$

ლემა 1.4. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*\left(Q_4\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_4\right)\right| = &\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

ლემა 1.5. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*\left(Q_5\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_5\right)\right| = 3\cdot&\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\\
&+\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

ლემა 1.6. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*\left(Q_6\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_6\right)\right|=&\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

ლემა 1.7. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*\left(Q_7\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_7\right)\right|=&\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

ლემა 1.8. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*\left(Q_8\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_8\right)\right|=&\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&+\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

ახლა დავუშვათ, რომ $k_1=\sum_{i=1}^{8}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$.

თეორემა 1.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ და $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $\left|I_D\right|=k_1$.

2. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$.

თეორემა 2.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$, $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$ და $\alpha\in B_X\left(D\right)$. $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 1.1-ისა და შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right),$ სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_6^\alpha\supseteq Z_6$;

10) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)$, სადაც $T\in\left\{Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing.$

11) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $T\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha\supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

12) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right),$ სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha\supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_2,$ $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$.

ლემა 2.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_6=\varnothing,$ $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing,$ $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_9)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_9)\right|=3^{|X\setminus Z_4|}$.

ლემა 2.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_6=\varnothing,$ $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing,$ $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{10})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{10})\right|=&\left(4^{|Z_2\setminus Z_4|}-3^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot4^{|X\setminus Z_2|}+\left(4^{|Z_1\setminus Z_4|}-3^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot4^{|X\setminus Z_1|}+\\&+\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot4^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

ლემა 2.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_6=\varnothing,$ $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing,$ $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{11})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{11})\right|=&\left(4^{|Z_2\setminus Z_4|}-3^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+\left(4^{|Z_1\setminus Z_4|}-3^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

ლემა 2.4. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_6=\varnothing,$ $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing,$ $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{12})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$\left|I^*\left(Q_{12}\right)\right| = 3^{\left|(Z_2 \cap Z_1)\setminus Z_4\right|} \cdot \left(4^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 3^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot \left(4^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$

ახლა დავუშვათ, რომ $k_2 = \left|I^*\left(Q_9\right)\right| + \left|I^*\left(Q_{10}\right)\right| + \left|I^*\left(Q_{11}\right)\right| + \left|I^*\left(Q_{12}\right)\right|$.

თეორემა 2.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2\left(X,8\right)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $\left|I_D\right| = k_1 + k_2$.

3. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$.

თეორემა 3.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2\left(X,8\right)$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$ და $\alpha \in B_X\left(D\right)$. $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 2.1-ისა და შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

13) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3 \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$.

14) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

15) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$;

ლემა 3.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_9)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_9)\right| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|}$.

ლემა 3.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{10})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_{10})\right| = \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} +$$
$$+ \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

ლემა 3.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{13})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|}$.

ლემა 3.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{14})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_{14})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$.

ლემა 3.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{15})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_{15})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$

ახლა დავუშვათ, რომ $k_3 = \sum_{i=9}^{15} \left|I^*(Q_i)\right|$.

თეორემა 3.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $\left|I_D\right| = k_1 + k_3$.

4. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$.

თეორემა 4.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და

მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 2.1-ისა და შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq Z_T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T',\ Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

13) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4 \times Z_4\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$;

14) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$.

15) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$.

ლემა 4.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_9)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_9)\right| = 3^{|X\setminus Z_4|} + 3^{|X\setminus Z_2|}$.

ლემა 4.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{10})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_{10})\right| = \left(4^{|Z_2\setminus Z_4|} - 3^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1\setminus Z_4|} - 3^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|} +$$
$$+\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_4|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}$$

ლემა 4.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{13})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|} - 1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}$.

ლემა 4.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{14})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_{14})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$.

ლემა 4.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{15})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|I^*(Q_{15})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$.

ახლა დავუშვათ, რომ $k_4 = \sum_{i=9}^{15} \left|I^*(Q_i)\right|$.

თეორემა 4.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $|I_D| = k_1 + k_4$.

5. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$.

თეორემა 5.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 2.1-ისა და შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq Z_T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

13) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_{T''} \times T''\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z_Z\right)$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$,

$(T \cup T') \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

14) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,

სადაც T, T', Z, $Z' \in D$, $Z \in \{Z_5, Z_3\}$, $Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \subset Z' \subset \breve{D}$, $T' \subset Z \subset Z'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus Z \neq \varnothing$, $Z \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

15) $\alpha = (Y_T^\alpha \times Z_T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T'' \cup Z_4}^\alpha \times (T'' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$

სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $T'' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T''$, $T \cup T' = Z_4$, $(T'' \cup Z_4) \cup Z = \breve{D}$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T'' \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus T'' \neq \varnothing$, $(T'' \cup Z_4) \setminus Z \neq \varnothing$, $Z \setminus (T'' \cup Z_4) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$.

ლემა 5.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_9)|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $|I^*(Q_9)| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|} + 3^{|X \setminus Z_2|}$

ლემა 5.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{10})|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$|I^*(Q_{10})| = \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} +$$
$$+ \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

ლემა 5.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{13})|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$|I^*(Q_{13})| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}.$$

ლემა 5.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{14})|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*\left(Q_{14}\right)\right| = \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(6^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \left(2^{\left|Z_5 \setminus Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(6^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 5^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

ლემა 5.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right| = \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(4^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 7^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ + \left(2^{\left|Z_5 \setminus Z_1\right|} - 1\right) \cdot \left(4^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 3^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 7^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

ახლა დავუშვათ, რომ $k_5 = \sum_{i=9}^{15} \left|I^*\left(Q_i\right)\right|$.

თეორემა 5.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $\left|I_D\right| = k_1 + k_5$.

6. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$.

თეორემა 6.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 5.1-ისა და შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

13) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_{T''} \times T''\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z_Z\right)$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $\left(T \cup T'\right) \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $\left(T \cup T'\right) \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus \left(T \cup T'\right) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

16) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$,

სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$.

ლემა 6.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_9)\right|$-ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით: $\left|I^*(Q_9)\right| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|} + 3^{|X \setminus Z_2|} + 3^{|X \setminus \breve{D}|}$.

ლემა 6.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{13})\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|} + \\ + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|}$$

ლემა 6.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|I^*(Q_{16})\right|$-ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით: $\left|I^*(Q_{16})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|}$

ახლა დავუშვათ, რომ $k_6 = \sum_{i=9}^{16} \left|I^*(Q_i)\right|$.

თეორემა 6.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $|I_D| = k_1 + k_6$.

7. ამ პარაგრაფში მოცემულია $\sum_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების მაქსიმალური ქვეჯგუფების სრული აღწერა.

ლემა 7.1. იმ ნახევარმესერების ავტომორფოზმთა რაოდენობა, რომლებიც განსაზღვრული არიან ნახაზი 2-ის 1), 2), 3), 4), 8), 13), 14) და 15) დიაგრამებით ტოლია 1-ის, იმ ნახევარმესერების ავტომორფოზმთა რაოდენობა, რომლებიც განსაზღვრული არიან ნახაზი 2-ის 5), 6), 7), 9), 10) 11) და 16) დიაგრამებით ტოლია 2-ის, ხოლო იმ ნახევარმესერების ავტომორფოზმთა რაოდენობა, რომლებიც განსაზღვრული არიან ნახაზი 2-ის 12) დიაგრამით ტოლია 4-ის.

თეორემა 7.1. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ε ბინარული მიმართებისათვის, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის $G_X(D,\varepsilon)$ ქვეჯგუფი

წარმოადგენს ჯგუფს, რომლის რიგი არის ერთის, ორის ან ოთხის ტოლი.

თავი III. რეგულარული ელემენტები. ამ თავში მოცემულია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების სრული აღწერა. როცა X არის სასრული სიმრავლე, გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დათვლილია მოცემული ნახევარჯ-გუფების რეგულარული ელემენტების რაოდენობა.

რეგულარული ელემენტების აღწერამდე გამოყვანილია $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ ნახევარმესერით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები და როცა X სასრული სიმრავლეა გამოყვანილია მათი რაოდენობის დათვლის ფორმულა.

ლემა 8.1. ვთქვათ $D\in\sum_2\left(X,8\right)$ და $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. მაშინ α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha=\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)\cup\bigcup\limits_{i=1}^{7}\left(Y_i^{\alpha}\times Z_i\right)$, სადაც $Y_7^{\alpha},Y_6^{\alpha},Y_5^{\alpha},Y_3^{\alpha}\notin\left\{\varnothing\right\}$, არის $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი D ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც $D'=\left\{\bar{Z}_7,\bar{Z}_6,\bar{Z}_5,\bar{Z}_4,\bar{Z}_3,\bar{Z}_2,\bar{Z}_1,\bar{Z}_0\right\}$ $XI-$ქვენახევარმესერზე,

$$\varphi=\begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ \bar{Z}_7 & \bar{Z}_6 & \bar{Z}_5 & \bar{Z}_4 & \bar{Z}_3 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 & \bar{Z}_0 \end{pmatrix}$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_7^{\alpha}\supseteq\bar{Z}_7,\ Y_6^{\alpha}\supseteq\bar{Z}_6,\ Y_7^{\alpha}\cup Y_5^{\alpha}\supseteq\bar{Z}_5,\ Y_6^{\alpha}\cup Y_3^{\alpha}\supseteq\bar{Z}_3,$$
$$Y_5^{\alpha}\cap\bar{Z}_5\neq\varnothing,\ Y_3^{\alpha}\cap\bar{Z}_3\neq\varnothing$$

ლემა 8.2. ვთქვათ $D\in\sum_2\left(X,8\right)$ და $Z_5\cap Z_3=\varnothing$ და $\left|\Sigma_2\left(X,8\right)\right|=m_0$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $XI-$ნახევარმესერები D და $D'=\left\{\bar{Z}_7,\bar{Z}_6,\bar{Z}_5,\bar{Z}_4,\bar{Z}_3,\bar{Z}_2,\bar{Z}_1,\bar{Z}_0\right\}$ ერთმანეთის $\alpha-$იზომორფულია, მაშინ

$$\left|R\left(D'\right)\right|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{\left|\bar{Z}_5\setminus\bar{Z}_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|\bar{Z}_3\setminus\bar{Z}_2\right|}-1\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\bar{Z}_0\right|}$$

8. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$.

თეორემა 8.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარ-ჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \breve{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times T' \cup T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$, $Z' \setminus Z \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_{Z'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$,

$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,

სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus T' \neq \varnothing$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \varnothing$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \varnothing$,

$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$;

ლემა 8.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_1)\right|$-ის სიძლავრე ტოლია $\left|R^*(Q_1)\right| = 8$.

ლემა 8.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_2)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*(Q_2)\right| = 19 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + 19 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} - 19 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}$$

ლემა 8.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_3)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}
\left|R^*(Q_3)\right| = {} & 18 \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 18 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 18 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 18 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 18 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 18 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 18 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 18 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\
& - 18 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 18 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_5|} \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_3|} \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}
\end{aligned}$$

ლემა 8.6. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_4)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$
\begin{aligned}
\left|R^*(Q_4)\right| = {} & 6\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +6\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

ლემა 8.7. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_5)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$
\begin{aligned}
\left|R^*(Q_5)\right| == {} & 14\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+14\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +14\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+14\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\\
& +14\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}-\\
& -7\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -7\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -7\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -7\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -7\cdot 2^{|Z_5\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_2|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -7\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_2|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|Z_5\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -7\cdot 2^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -7\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}
\end{aligned}
$$

ლემა 8.8. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_6)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*\left(Q_6\right)\right| = 2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

ლემა 8.9. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$, $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_7\right)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*\left(Q_7\right)\right| = 2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

ლემა 8.10. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$, $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_8\right)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*\left(D_8\right)\right| = 2\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

დავუშვათ, რომ $r_1=\sum_{i=1}^{8}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$.

თეორემა 8.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$, $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D-ით აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $\left|R_D\right|=r_1$.

ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$, $\sum_2\left(X,8\right)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფების ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე წარმოადგენს $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფს.

9. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$.

თეორემა 9.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ისა და ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha=(Y_7^\alpha\times Z_7)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$;

10) $\alpha=(Y_7^\alpha\times Z_7)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_T^\alpha\times T)$, სადაც $T\in\{Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_T^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$;

11) $\alpha=(Y_7^\alpha\times Z_7)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$, სადაც $T\in\{Z_2,Z_1\}$, $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$;

12) $\alpha=(Y_7^\alpha\times Z_7)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_2^\alpha\times Z_2)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1)\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$;

ლემა 9.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_9)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*(Q_9)\right|=2\cdot 3^{|X\setminus Z_4|}$.

ლემა 9.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_{10})\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*(Q_{10})\right|=6\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

ლემა 9.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_{11})\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*(Q_{11})\right| = 4 \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} +$$
$$+ 4 \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

ლემა 9.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_{12})\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*(Q_{12})\right| = 4 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

დავუშვათ, რომ $r_2 = \sum_{i=9}^{12} \left|R^*(Q_i)\right|$.

თეორემა 9.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D-ით აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $\left|R_D\right| = r_1 + r_2$.

10. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$.

თეორემა 10.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X,8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარ-მესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 9.1-ისა და ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$;

10) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

13) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3\times Z_3\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_3^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$;

14) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_3^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$;

15) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_3^\alpha,Y_2^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$, $Y_2^\alpha\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$.

ლემა 10.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_9\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_9\right)\right|=4\cdot3^{\left|X\setminus Z_4\right|}$

ლემა 10.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|=8\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

ლემა 10.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot5^{\left|X\setminus Z_1\right|}$.

ლემა 10.4. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

ლემა 10.5. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|$-ის სიმლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$.

დავუშვათ, რომ $r_3=\sum_{i=9}^{15}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$.

თეორემა 10.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D-ით აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $\left|R_D\right|=r_1+r_3$.

11. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$.

თეორემა 11.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარ-მესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 9.1-ისა და ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)$, სადაც $T,T'\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$;

10) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

13) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq\varphi(Z_5)$, $Y_5^\alpha\cap\varphi(Z_5)\neq\varnothing$.

14) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq\varphi(Z_5)$, $Y_5^\alpha\cap\varphi(Z_5)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$.

15) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$ $Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq\varphi(Z_5)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_5^\alpha\cap\varphi(Z_5)\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$.

ლემა 11.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_9\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_9\right)\right|=4\cdot 3^{\left|X\setminus Z_4\right|}$.

ლემა 11.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|=8\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

ლემა 11.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|X\setminus Z_2\right|}$.

ლემა 11.4. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

ლემა 11.5. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|$ -ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

დავუშვათ, რომ $r_4=\sum_{i=9}^{15}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$.

თეორემა 11.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D -ით აღვნიშნავთ $B_X(D)$

ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $\left|R_D\right| = r_1 + r_4$.

12. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2\left(X,8\right)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$.

თეორემა 12.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2\left(X,8\right)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი $V\left(D,\alpha\right)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 9.1-ისა და ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$, სადაც $T,T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$,
$T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi\left(T\right)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi\left(T'\right)$;

10) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$, სადაც $T,T',T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi\left(T\right)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi\left(T'\right)$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi\left(T''\right) \neq \varnothing$;

13) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_{T''} \times T''\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z_Z\right)$, სადაც $T,T',T'',Z \in D$, $\left(T \cup T'\right) \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $\left(T \cup T'\right) \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus \left(T \cup T'\right) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin \left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi\left(T\right)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi\left(T'\right)$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi\left(T''\right)$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi\left(T''\right) \neq \varnothing$;

14) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $T,T',Z,$ $Z' \in D$, $Z \in \left\{Z_5, Z_3\right\}$, $Z' \in \left\{Z_2, Z_1\right\}$, $Z_4 \subset Z' \subset \breve{D}$, $T' \subset Z \subset Z'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus Z \neq \varnothing$, $Z \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_0^\alpha \notin \left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi\left(T\right)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi\left(T'\right)$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi\left(Z\right)$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi\left(Z\right) \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi\left(\breve{D}\right) \neq \varnothing$.

15) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times Z_T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_{T''\cup Z_4}^\alpha\times\left(T''\cup Z_4\right)\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ სადაც $T,T',T'',Z\in D$, $T''\in\left\{Z_5,Z_3\right\}$, $T\subset T''$, $T\cup T'=Z_4$, $\left(T''\cup Z_4\right)\cup Z=\breve{D}$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $T''\setminus Z_4\neq\varnothing$, $Z_4\setminus T''\neq\varnothing$, $\left(T''\cup Z_4\right)\setminus Z\neq\varnothing$, $Z\setminus\left(T''\cup Z_4\right)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_Z^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi(T'')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$, $Y_Z^\alpha\cap\varphi(Z)\neq\varnothing$.

ლემა 12.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_9\right)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_9\right)\right|=6\cdot3^{\left|X\setminus Z_4\right|}$.

ლემა 12.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|=10\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

ლემა 12.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot5^{\left|X\setminus Z_1\right|}+2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot5^{\left|X\setminus Z_2\right|}$.

ლემა 12.4. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

ლემა 12.5. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|$-ის სიძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

დავუშვათ, რომ $r_5=\sum_{i=9}^{15}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$.

თეორემა 12.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D-ით აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $\left|R_D\right|=r_1+r_5$.

13. ამ პარაგრაფში აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_5\cap Z_3=\varnothing$.

თეორემა 13.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$ და $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარ-მესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 12.1-ისა და ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

9) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)$, სადაც $T,T'\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$;

13) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_{T''}\times T''\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z_Z\right)$, სადაც $T,T',T'',Z\in D$, $\left(T\cup T'\right)\subset Z$, $T'\subset T''\subset Z$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $\left(T\cup T'\right)\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus\left(T\cup T'\right)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi(T'')$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

16) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha,Y_3^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq\varphi(Z_5)$, $Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_5^\alpha\cap\varphi(Z_5)\neq\varnothing$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$.

ლემა 13.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_9)\right|$-ის სიმლავრე გამოითვლება ფორმულით: $\left|R^*(Q_9)\right|=8\cdot 3^{|X\setminus Z_4|}$.

ლემა 13.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_{13})\right|$-ის სიმლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*(Q_{13})\right|=4\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+4\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}$$

ლემა 13.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $\left|R^*(Q_{16})\right|$-ის სიმლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|R^*(Q_{16})\right|=2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}$$

დავუშვათ, რომ $r_6=\sum_{i=9}^{16}\left|R^*(Q_9)\right|$.

თეორემა 13.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D-ით აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $|R_D|=r_1+r_6$.

ნაშრომის შედეგების აპრობაცია

ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია 7 საერთაშორისო ჟურნალში. ნაშრომში მიღებული შედეგები მოხსენებული იქნა საერთაშორისო კონფერენციებზე და გენერალურ სემინარებზე:

1. Of the international conference "MODERN ALGEBRA AND ITS APPLICATION"- ბათუმი, 2010, XI – Subsemilattice of the Semilattice of class $\Sigma_2(X,8)$.

2. Of the international conference "MODERN ALGEBRA AND ITS APPLICATION"- ბათუმი, 2011, Idempotent Elements of the Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$.

3. General Seminars at Department of mathematics, HACETTEPE University, Ankara, TURKEY, 2016, ,,Complete Semigroups of Binary Relations Defined By The Semilattices of a Class $\Sigma_2(X,8)$''.

4. General Seminars at Department of mathematics, CANAKKALE Onsekiz Mart University, Canakkale, TURKEY 2016. ,,Complete Semigroups of Binary Relations Defined By The Semilattices of a Class $\Sigma_2(X,8)$".

ნაშრომში მიღებული შედეგები ასევე განხილულია მათემატიკის დეპარტამენტის სამეცნიერო სემინარებზე.

სადისერტაციო ნაშრომის წინასწარი განხილვა შედგა ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის გაფართოებულ სხდომაზე, სადაც იგი მოწონებული და რეკომენდირებული იქნა დაცვისთვის.

დანართი

სადისერტაციო ნაშრომს ბოლოში ერთვის 7 დანართი. პირველ დანართში მოცემულია მაგალითი, რომელშიც აგებულია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერები, როცა $|X|=4$. შემდეგ 6 დანართში ექვსივე შემთხვევისთვის მოცემულია მაგალითები, რომლებშიც სასრული X სიმრავლის შემთხვევაში აგებულია მოცემული კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები და ნაჩვენებია, რომ თეორიული და პრაქტიკული გამოთვლები ერთმანეთს ემთხვევა.

შრომები

1. Tsinaridze Nino. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. **IJISET** – International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology, Vol. 3 Issue 1, January 2016, 162-171. www.ijiset.com;

2. Tsinaridze Nino, Makharadze Shota. Regular Elements of the Complete Semigroups $B_X(D)$ of Binary Relations of the Class $\Sigma_2(X,8)$. **Applied Mathematics**, 2015, 6, 447-455. www.scirp.org/journal/am http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.63042;

3. Tsinaridze Nino. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$. **Gen. Math. Notes**. Vol. 27, No. 2, April 2015, pp. 17-36. www.i-csrs.org, http://www.geman.in;

4. Tsinaridze Nino, Makharadze Shota, Fartenadze Guladi. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$ and Their Calculation Formulas. **Applied Mathematics**, 2015, 6, 2257-2278. http://www.scirp.org/journal/am
http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.614199;

5. Tsinaridze Nino, Diasamidze Yasha. Maximal Subcroups of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$. **IJESIT**- International Journal of Engineering Science and Innovative Technology, Vol. 4, Issue 6, November 2015, pp. 61-74. http://www.ijesit.com/archive/25/volume-4-issue-6november-2015.html;

6. Tsinaridze Nino. Subsemilattice of a Semilattice of Class $\Sigma_2(X,8)$. **Journal of Mathematical Sciences** Vol. 191, No. 6, june, 2013, pp. 871-875. http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-013-1367-9;

7. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino.** Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of The Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ and their calculation Formulas. **International Journal of Pure Mathematical Sciences** ISSN: 2297-6205. Vol. 16, pp 1-23.
doi:10.18052/www.scipress.com/IJPMS.16.1.

8. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino,** Aidn Neset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X,10)$-*I*. **Applied Mathematics,** 2016, 7, 867-893, www.scirp.org /journal/am
http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.79078;

9. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino,** Aidn Neset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X,10)$-*II*. **Applied Mathematics**, 2016, 7, 894-907, www.scirp.org /journal/am
http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.79079;

BATUMI SHOTA RUSTAVELI STATE UNIVERSITY

FACULTY OF PHYSICS-MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

with the right of manuscript

Nino Tsinaridze

COMPLETE SEMIGROUPS OF BINARY RELATIONS DEFINED BY SEMILATTICES OF THE CLASS $\sum_2(X,8)$

This dissertation is submitted for the degree of
Academic Doctor of Mathematics
Anotation

Speciality-Mathematics

BATUMI
2017

The dissertation work has been carried out in the Department of Mathematics of Faculty of Physics-Mathematics and Computer Sciences of Batumi Shota Rustaveli State University.

Scientific Supervisor:

Yasha Diasamidze
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Batumi Shota Rustaveli State University.

Foreign evaluators:

Neşet Aydin
Professor, Çanakkale Onsekiz Mart University.

Ali Erdoğan
Professor, Hacettepe University.

Evaluators:

Mikheil Amaglobeli
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Asosociate Professor, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University.

Tengiz Bokelavadze
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Asosociate Professor, Akaki Tsereteli State University.

Guladi Fartenadze
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Asosociate Professor, Batumi Shota Rustaveli State University.

Defence of Dissertation work will be held on 18 February, 2017, 14^{00} at the Dissertation council of faculty of Physics-Mathematics and Computer Sciences of Batumi Shota Rustaveli State University.

Address: Georgia, Batumi, Ninoshvili str. 35, 6010, Shota Rustaveli holl №55, University Building I

The thesis will be available at the Batumi Shota Rustaveli State University Library and on the Web-page **www.bsu.edu.ge**

The secretary of the Dissertation Council,
Associate Professor **Dali Makharadze**

ACTUALITY OF THE TOPIC

The semigroup theory is one of the actively developping areas of modern algebra. It has close relationships with diverse mathematical disciplines among which are differential geometry, functional analysis, graph theory, theory of algorithms, abstract automata theory and others.

In the semigroup theory quite a number of profound results are connected with a semigroup of binary relations. These results include the generalized Kelly's theorem, Zaretski's theorem on the definition of a semigroup of binary relations by densely embedded ideals, Shaik-Maccenzi's theorem on an exact transitive representation of any semigroup by binary relations, also the results of Schwartz, Tamura, Clifford, Butler and other well known scientists.

Since any semigroup can be isomorphically embedded into some complete semigroup of binary relations defined by complete $X-$semilattice of unions, when investigating subsemigroups of a semigroup we generally study semigroups. Besides, idempotents, unilateral units, irreducible and external elements of semigroups play an exceptionally important role in the study of the abstract properties of semigroups.

Difficulties encountered in studying semigroups of binary relations arise because of the fact that they are not regular as a rule, which makes their investigation technically problematic. So we think it interesting to carry out a systematic study of semigroups of binary relations and their most important classes using complete $X-$semilattices of unions, which used first by one of the authors Yasha Diasamidze in his doctor dissertation. It is this new direction, we can describe it in a few words as follows.

Let X be an arbitrary nonempty set, D be an $X-$ semilattice of unions, i.e. a nonempty set of subsets of the set X that is closed with respect to the set-theoretic operations of unification of elements from D, f be an arbitrary mapping from X into D. To each such a mapping f there corresponds a binary relation α_f on the set X that satisfies the condition $\alpha_f = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x) \right)$. The set of all such α_f $(f : X \to D)$ is denoted by $B_X(D)$. It is easy to prove that $B_X(D)$ is a semigroup with respect to the operation of multiplication of binary relations and we call it a complete semigroup of binary relations defined by an $X-$ semilattice of unions D .

$\Sigma(X,m)$ is the class complete $X-$semilattices of unions whose every element have the power m. Let $D_1, D_2, ..., D_n$ are any complete $X-$semilattices of unions of the class $\Sigma(X,m)$ for which D_i and D_j are not isomorphic $(1 \le i \ne j \le n)$. $\Sigma_k(X,m)$ is the class complete $X-$semilattices of unions whose every element is isomorphic to some fixed semilattice D_k $(1 \le k \le n)$ which has the power m.

By using the complete X – semilattices, the study of complete set $B_X(D)$ of all a binary relation semigroups and spreading of the results are highly supported by Sh. Makharadze. The schientific degrees in this direction were successfully defended by Z. Avaliani, G. Partenadze, O. Givradze and N. Rokva, also the degree of mathematical academic doctors were defended by D. Ieshil and B. Albayrak in the republic of Turkey.

GOALS OF THESIS

The main aim of the dissertation work is the studying of the abstract properties of such complete semigroups of binary relations, which are defined by the complete $X-$semilattices of unions of the class $\Sigma_2(X,8)$.

The research subject is as the complete $X-$semilattices of unions of the class $\Sigma_2(X,8)$, as well as the the complete $X-$semilattices of unions defined by the given semilattices, because these kind of semilattices, as the researches show, keep a significant information with regard to those complete semigroups of binary relations, which they define.

SCIENTIFIC NOVELTY OF THESIS

In the present dissertation work firstly are considered the classes of such complete semigroups of binary relations $B_X(D)$, which are defined by the semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$. There are investigated the characteristics of semilattices of the given class in compliance with an appropriate diagram.

When X is a finite set, there are deducted the formulas for counting semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$. There are described the idempotent elements of semigroups $B_X(D)$ defined by each semilattice D of the class $\Sigma_2(X,8)$ and when X is a finite set, there are deducted the formulas for counting idempotent elements. There are also described the maximal subgroups of semigroups $B_X(D)$ defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$. In addition, there are described the regular elements of semigroups $B_X(D)$ defined by each semilattice D of the given class and when X is a finite set, there are deducted the formulas for counting regular elements.

The studying of the above-mentioned issues is based on the properties of the complete X – semilattices of unions. It turned out that the studying of the semigroups classes by this method is very effective. The results obtained in the present work give us the opportunity to talk about on the multiple properties of the given semigroup on the basis the diagram of semilattice defined by this semigroup. In particular, whether the semigroups has right units, and how it is built its idempotent and regular elements, maximal subgroups, etc.

BASIC METHODS OF INVESTIGATION

As is well known idempotent elements of a semigroup, one-sided units, regular elements, maximal subgroups play an important role in the investigation of the abstract properties of semigroups. Therefore, during the studying of the classes of complete semigroups of binary relations a great attention is paid to the studying of the above-mentioned issues in a semigroup.

The studying of the characteristics of the semigroups in the dissertation work is carried out by means of the properties of the semilattices. An important part of the abstract properties of the complete semigroups of binary relations is basically determined by such X - Semilattices of unions, which define the elements of the given class.

In the present work, there are used set theory, semigroup theory, semilattice theory, and the general method of combinatorics.

THE PRACTICAL AND THEORETICAL IMPORTANCE OF THE THESIS

The dissertation is mainly theoretical. The results of the work can be used for investigating semigroups and semilattices in future.

GENERAL CHARACTERIZATION OF THESIS

The dissertation work consists the introduction, 3 chapters, 18 paragraphs and 7 appendix. The total capacity of the present work is composed by 329 pages.

Chapter I. Subsemilattice of The Semilattice Class $\mathbf{\Sigma_2(X,8)}$.

In this section class of $\Sigma_2(X,8)$ is defined, when X finite set is obtained and the formulas for given class semilattices quantity is shown, also here the semilattices of class $\Sigma_2(X,8)$ and separated XI subsemillatices are shown.

Let $X \neq \varnothing$. By the symbol $\Sigma_2(X,8)$ we denote the class of all $X-$semilattices of unions whose every element is isomorphic to an $X-$semilattice of form $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, which shown in Figure 1.

Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $C(D)=\{P_7,P_6,P_5,P_4,P_3,P_2,P_1,P_0\}$ is a family sets, where P_7, P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0 are pairwise disjoint subsets of the set X and $\psi=\begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ P_7 & P_6 & P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}$ is a mapping of the semilattice D into the family sets $C(D)$, then for the formal equalities of the semilattice D we have a form:

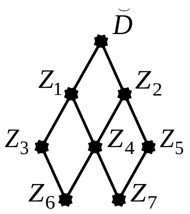


Figure 1.

$$\begin{aligned}
\breve{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
Z_1 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
Z_2 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
Z_3 &= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
Z_4 &= P_0 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
Z_5 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7 \\
Z_6 &= P_0 \cup P_5 \cup P_7 \\
Z_7 &= P_0 \cup P_3 \cup P_6
\end{aligned}$$

here the elements P_1,P_2,P_3,P_5 are basis sources, the element P_0,P_4,P_6,P_7 are sources of completenes of the semilattice D. Therefore $|X|\geq 4$ and $\delta=4$.

Lemma 1. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$, $|\Sigma_2(X,8)|=s$ and $|X|\geq\delta\geq 4$. If X be a finite set, then $s=\frac{1}{2}\cdot\left(9^n-4\cdot 8^n+6\cdot 7^n-4\cdot 6^n+5^n\right)$.

Now let's describe XI subsemilattices of $\Sigma_2(X,8)$ class. There are 6 cases:

1) $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$; **2**) $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$;

3) $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$; **4**) $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$;

5) $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$; **6**) $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$.

That is why for each case, subsemilattices of given XI class is discussed separately.

Lemma 2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$, then the following sets exhibit all XI – subsemilattices of the considered semilattice D:

1) $\{\breve{D}\},\{Z_1\},\{Z_2\},\{Z_3\},\{Z_4\},\{Z_5\},\{Z_6\},\{Z_7\}$ (see diagram 1 of the fig. 2);

2) $\{Z_7,Z_5\},\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_2\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4\},\{Z_6,Z_3\},\{Z_6,Z_2\}$, $\{Z_6,Z_1\},\{Z_6,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,Z_1\}$, $\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 2 of the figure 2);

3) $\{Z_7,Z_5,Z_2\},\{Z_7,Z_5,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_2\},\{Z_6,Z_4,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_1\},\{Z_6,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 3 of the figure 2);

4) $\{Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 4 of the figure 2);

5) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 5 of the figure 2);

6) $\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 6 of the figure 2);

7) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 7 of the figure 2);

8) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 8 of the fig. 2).

Lemma 3. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$, then semilattices from the lemma 2 and the following sets exhibit all XI – subsemilattices of the considered semilattice D:

9) $\{Z_7,Z_6,Z_4\}$ (see diagram 9 of the figure 2);

10) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \breve{D}\}$ (see diagram 10 of the figure 2);

11) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$ (see diagram 11 of the figure 2);

12) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (see diagram 12 of the figure 2).

Lemma 4. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$, then semilattices from the lemma 3 and the following sets exhibit all $XI-$subsemilattices of the considered semilattice D:

9) $\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}$ (see diagram 9 of the figure 2);

10) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$ (see diagram 10 of the figure 2);

13) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$ (see diagram 13 of the figure 2);

14) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$ (see diagram 14 of the figure 2);

15) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (see diagram 15 of the figure 2).

Lemma 5. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, then semilattices from the lemma 3 and the following sets exhibit all $XI-$subsemilattices of the considered semilattice D:

9) $\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}$ (see diagram 9 of the figure 2);

10) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$ (see diagram 10 of the figure 2);

13) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$ (see diagram 13 of the figure 2);

14) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\}$ (see diagram 14 of the figure 2);

15) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (see diagram 15 of the figure 2).

Lemma 6. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$, then semilattices from the lemma 4 and from the lemma 5 exhibit all $XI-$subsemilattices of the considered semilattice D.

Lemma 7. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$, then semilattices from the lemma 6 and the following sets exhibit all $XI-$subsemilattices of the considered semilattice D:

9) $\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, \breve{D}\}$ (see diagram 9 of the figure 2);

13) $\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2\},\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 13 of the figure 2);

16) $\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (see diagram 16 of the figure 2).

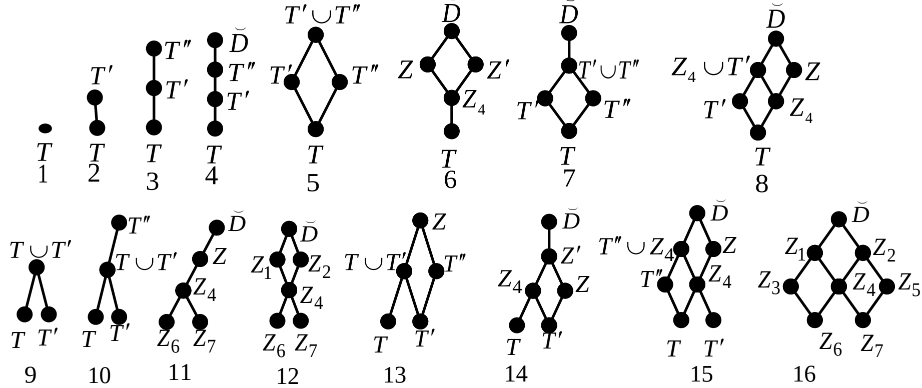


Figure 2.

Chapter II. Idempotent Elements. In this section gives full description of idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$. When X is a finite set, the formulas are derived, by means of which the number of idempotent elements of the semigroup is calculated.

Assume that $D\in\Sigma_2(X,8)$, By the symbols Q_i $(i=1,2,3,\ldots,16)$ we denote the following sets:

1) $Q_1=\{T\}$, where $T\in D$ (see diagram 1 of the figure 2);

2) $Q_2=\{T,T'\}$, where $T,T'\in D$ და $T\subset T'$ (see diagram 2of the fig. 2);

3) $Q_3=\{T,T',T''\}$, where $T,T',T''\in D$ და $T\subset T'\subset T''$ (see diagram 3 of the figure 2);

4) $Q_4=\{T,T',T'',\breve{D}\}$, where $T,T',T''\in D$ და $T\subset \acute{T}\subset \acute{T}'\subset$ (see diagram 4 of the figure 2);

5) $Q_5=\{T,T',T'',T'\cup T''\}$, where $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$ და $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$ (see diagram 5 of the figure 2);

6) $Q_6=\{T,Z_4,Z,Z',\breve{D}\}$, where $T\in\{Z_7,Z_6\}$, $Z,Z'\in\{Z_2,Z_1\}$, $Z\neq Z'$ and $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$ (see diagram 6 of the figure 2);

7) $Q_7=\{T,T',T'',T'\cup T'',\breve{D}\}$, where $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$ and $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$ (see diagram 7 of the figure 2);

8) $Q_8=\{T,T',Z_4,Z_4\cup T',Z,\breve{D}\}$, where $T\in\{Z_7,Z_6\}$, $T'\in\{Z_5,Z_3\}$, $T\subset T'$, $Z_4\cup T'$, $Z\in\{Z_2,Z_1\}$, $Z_4\cup T'\neq Z$, $T'\setminus Z_4\neq\varnothing$, $Z_4\setminus T'\neq\varnothing$ and $(Z_4\cup T')\setminus Z\neq\varnothing$, $Z\setminus(Z_4\cup T')\neq\varnothing$ (see diagram 8 of the fig. 2);

9) $Q_9=\{T,T',T\cup T'\}$, where $T,T'\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ და $T\cap T'=\varnothing$ (see diagram 9 of the figure 2);

10) $Q_{10}=\{T,T',T\cup T',T''\}$, where $T,T',T''\in D$, $(T\cup T')\subset T''$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ and $T\cap T'=\varnothing$ (see diagram 10 of the figure 2);

11) $Q_{11}=\{Z_7,Z_6,Z_4,Z,\breve{D}\}$, where $Z\in\{Z_2,Z_1\}$ and $Z_7\cap Z_6=\varnothing$ (see diagram 11 of the figure 2);

12) $Q_{12}=\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, where $Z_7\cap Z_6=\varnothing$ (see diagram 12 of the figure 2);

13) $Q_{13}=\{T,T',T\cup T',T'',Z\}$, where $T,T',T'',Z\in D$, $(T\cup T')\subset Z$, $T'\subset T''\subset Z$, $(T\cup T')\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus(T\cup T')\neq\varnothing$ and $T\cap T''=\varnothing$ (see diagram 13 of the figure 2);

14) $Q_{14}=\{T,T',Z_4,Z,Z',\breve{D}\}$, where $T,T',Z,Z'\in D$, $T,T'\in\{Z_7,Z_6\}$, $T\neq T'$, $Z_4\subset Z'\subset\breve{D}$, $T'\subset Z\subset Z'$, $Z_4\setminus Z\neq\varnothing$, $Z\setminus Z_4\neq\varnothing$ and $T\cap Z=\varnothing$ (see diagram 14 of the figure 2);

15) $Q_{15}=\{T',T,Z_4,T'',Z,T''\cup Z_4,\breve{D}\}$, where $T,T'\in\{Z_7,Z_6\}$, $T\neq T'$, $T\subset T''$, $T''\in\{Z_5,Z_3\}$, $Z_4\subset Z$, $(T''\cup Z_4)\cup Z=\breve{D}$, $T''\setminus Z_4\neq\varnothing$, $Z_4\setminus T''\neq\varnothing$, $(T''\cup Z_4)\setminus Z\neq\varnothing$ $Z\setminus(T''\cup Z_4)\neq\varnothing$ and $T'\cap T''=\varnothing$ (see diagram 15 of the figure 2);

16) $Q_{16}=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, where $Z_5\cap Z_3=\varnothing$ (see diagram 16 of the figure 2).

Before describing the idempotent elements of the given semigroup $B_X(D)$, first we will derived the necessary and sufficient conditions of existence of semigroup right unit and when X is finite set, the calculation formula is received.

Lemma 8. Let $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ be $XI-$semilattice. The binary relation α has a quazinormal representation of the form $\alpha=\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)\cup\bigcup_{i=1}^{7}\left(Y_i^\alpha\times Z_i\right)$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha\notin\{\varnothing\}$, is a right unit of the semmigroup $B_X(D)$, iff the binary relation α satisfies the following conditions:

$$Y_7^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_6^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq Z_3,$$
$$Y_5^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing.$$

Lemma 9. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_5\cap Z_3=\varnothing$ and $E_X^{(r)}(D)$ be the set of all right units of the semigroup $B_X(D)$. If X is a finite set, then the following formula is true: $\left|E_X^{(r)}(D)\right|=\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

1. In this pharagrap gives description of idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$.

Theorem 1.1. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$ and $\alpha\in B_X(D)$. The binary relation α is an idempotent relation of the semigroup $B_X(D)$ iff the binary relation α satisfies one of the following conditions:

1) $\alpha=X\times T$, where $T\in D$;

2) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$, where $T,T'\in D$, $T\subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$;

3) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, where $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, where $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''\subset\breve{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times T'\cup T''\right)$, where $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

6) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, where $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$, $Z' \setminus Z \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_{Z'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, Y_Z^\alpha \cap Z_Z \neq \varnothing, Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$;

7) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T''}^\alpha \times \left(T' \cup T''\right)\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, where $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

8) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times \left(T' \cup Z_4\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, where $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus T' \neq \varnothing$, $\left(Z_4 \cup T'\right) \setminus Z \neq \varnothing$, $Z \setminus \left(Z_4 \cup T'\right) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$;

Lemma 1.1. Let $D \in \Sigma_2(X, 8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_1)\right|$ can be calculated by the formula $\left|I^*(Q_1)\right| = 8$.

Lemma 1.2. Let $D \in \Sigma_2(X, 8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_2)\right|$ can be calculated by the formula:

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_2)\right| = {} & \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ & + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \\ & + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \\ & + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \\ & + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|}\end{aligned}$$

Lemma 1.3. Let $D \in \Sigma_2(X, 8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_3)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_3)\right| = &\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\\ &+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\\ &+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}\end{aligned}$$

Lemma 1.4. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_4)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_4)\right| = &\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

Lemma 1.5. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_5)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_5)\right| = 3\cdot&\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\\ &+\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\\ &+\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

Lemma 1.6. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_6)\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_7\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_4\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} +$$
$$+ \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_6\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_4\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

Lemma 1.7. Let $D \in \Sigma_2\left(X,8\right)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*\left(Q_7\right)\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*\left(Q_7\right)\right| = \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_5\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_5 \setminus Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} +$$
$$+ \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

Lemma 1.8. Let $D \in \Sigma_2\left(X,8\right)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*\left(Q_8\right)\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*\left(Q_8\right)\right| = \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} +$$
$$+ \left(2^{\left|Z_5 \setminus Z_1\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_5\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

Let us assume that $k_1 = \sum_{i=1}^{8} \left|I^*\left(Q_i\right)\right|$.

Theorem 1.2. Let $D \in \Sigma_2\left(X,8\right)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set and I_D is a set of all idempotent elements of the semigroup $B_X\left(D\right)$, then $\left|I_D\right| = k_1$.

2. In this pharagrap gives description of idempotent elements of the semigroup $B_X\left(D\right)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2\left(X,8\right)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing,\ \ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$.

Theorem 2.1. Let $D \in \Sigma_2\left(X,8\right),\ Z_7 \cap Z_6 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing,\ \ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$ and $\alpha \in B_X\left(D\right)$. The binary relation α is an idempotent relation of the semigroup $B_X\left(D\right)$ iff the binary relation α satisfies only one condition of the Theorem 1.1 and one of the following conditions:

9) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right)$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_6^\alpha \supseteq Z_6$;

10) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right)$, where $T \in \left\{Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_6^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$

11) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, where

$T \in \{Z_2, Z_1\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$.

Lemma 2.1. Let $D \in \Sigma_2(X, 8)$ and $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_9)\right|$ can be calculated by the formula $\left|I^*(Q_9)\right| = 3^{|X \setminus Z_4|}$.

Lemma 2.2. Let $D \in \Sigma_2(X, 8)$ and $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_{10})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{10})\right| = \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Lemma 2.3. Let $D \in \Sigma_2(X, 8)$ and $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_{11})\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{11})\right| = &\left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ &+ \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

Lemma 2.4. Let $D \in \Sigma_2(X, 8)$ and $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_{12})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{12})\right| = 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Let us assume that $k_2 = \left|I^*(Q_9)\right| + \left|I^*(Q_{10})\right| + \left|I^*(Q_{11})\right| + \left|I^*(Q_{12})\right|$

Theorem 2.2. Let $D \in \Sigma_2(X, 8)$ and $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set and I_D is a set of all idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$, then $\left|I_D\right| = k_1 + k_2$.

3. In this pharagrap gives description of idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$.

Theorem 3.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$ and $\alpha \in B_X(D)$. The binary relation α is an idempotent relation of the semigroup $B_X(D)$ iff the binary relation α satisfies only one condition of the Theorem 2.1 and one of the following conditions:

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, where $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, where $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq T',\ Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

13) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3 \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1)$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$.

14) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

15) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$;

Lemma 3.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$**.** If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_9)|$ can be calculated by the formula

$$|I^*(Q_9)| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|}$$

Lemma 3.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$**.** If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{10})|$ can be calculated by the formula

$$|I^*(Q_{10})| = \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Lemma 3.3. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_{13})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|}$$

Lemma 3.4. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_{14})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{14})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Lemma 3.5. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_{15})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{15})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Let us assume that $k_3 = \sum_{i=9}^{15} \left|I^*(Q_i)\right|$.

Theorem 3.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set and I_D is a set of all idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$, then $|I_D| = k_1 + k_3$.

4. In this pharagrap gives description of idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing.$

Theorem 4.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$ and $\alpha \in B_X(D)$. The binary relation α is an idempotent relation of the semigroup $B_X(D)$ iff the binary relation α satisfies only one condition of the Theorem 2.1 and one of the following conditions:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$, where $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$, where $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq Z_T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T',\ Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

13) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4 \times Z_4\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right)$, where

$Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$;

14) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$.

15) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$.

Lemma 4.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_9)|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_9)\right| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_2|}.$$

Lemma 4.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{10})|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{10})\right| = &\left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ &+ \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

Lemma 4.3. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{13})|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}.$$

Lemma 4.4. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{14})|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{14})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

Lemma 4.5. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{15})|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{15})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

Let us assume that $k_4 = \sum_{i=9}^{15} \left|I^*(Q_i)\right|$.

Theorem 4.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set and I_D is a set of all idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$, then $|I_D| = k_1 + k_4$.

5. In this pharagrap gives description of idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing,\ Z_6 \cap Z_5 = \varnothing,\ Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$.

Theorem 5.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$ and $\alpha \in B_X(D)$. The binary relation α is an idempotent relation of the semigroup $B_X(D)$ iff the binary relation α satisfies only one condition of the Theorem 2.1 and one of the following conditions:

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, where $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$,
$T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, where $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq Z_T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

13) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_T^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''} \times T'') \cup (Y_Z^\alpha \times Z_Z)$, where $T, T', T'', Z \in D$, $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

14) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,
where T, T', Z, $Z' \in D$, $Z \in \{Z_5, Z_3\}$, $Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \subset Z' \subset \breve{D}$, $T' \subset Z \subset Z'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus Z \neq \varnothing$, $Z \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

15) $\alpha = (Y_T^\alpha \times Z_T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T''\cup Z_4}^\alpha \times (T'' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$
where $T, T', T'', Z \in D$, $T'' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T''$, $T \cup T' = Z_4$, $(T'' \cup Z_4) \cup Z = \breve{D}$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T'' \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus T'' \neq \varnothing$, $(T'' \cup Z_4) \setminus Z \neq \varnothing$, $Z \setminus (T'' \cup Z_4) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the

conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$.

Lemma 5.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_9)|$ can be calculated by the formula $|I^*(Q_9)| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|} + 3^{|X \setminus Z_2|}$

Lemma 5.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{10})|$ can be calculated by the formula

$$|I^*(Q_{10})| = \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} +$$
$$+ \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Lemma 5.3. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{13})|$ can be calculated by the formula $|I^*(Q_{13})| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$.

Lemma 5.4. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{14})|$ can be calculated by the formula

$$|I^*(Q_{14})| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Lemma 5.5. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $|I^*(Q_{15})|$ can be calculated by the formula

$$|I^*(Q_{15})| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|} +$$
$$+ \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Let us assume that $k_5 = \sum_{i=9}^{15} |I^*(Q_i)|$.

Theorem 5.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set and I_D is a set of all idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$, then $|I_D| = k_1 + k_5$.

6. In this pharagrap gives description of idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$.

Theorem 6.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$ and $\alpha \in B_X(D)$. The binary relation α is an idempotent relation of the semigroup $B_X(D)$ iff the binary relation α satisfies only one condition of the Theorem 5.1 and one of the following conditions:

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, where $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

13) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_T^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''} \times T'') \cup (Y_Z^\alpha \times Z_Z)$, where $T, T', T'', Z \in D$, $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

16) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$.

Lemma 6.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_9)\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_9)\right| = 3^{|X\setminus Z_4|} + 3^{|X\setminus Z_1|} + 3^{|X\setminus Z_2|} + 3^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

Lemma 6.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_{13})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_3\setminus Z_4|} - 1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|} - 1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|} + \\ + \left(2^{|Z_3\setminus Z_2|} - 1\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_5\setminus Z_1|} - 1\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}$$

Lemma 6.3. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|I^*(Q_{16})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|I^*(Q_{16})\right| = \left(2^{|Z_5\setminus Z_1|} - 1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|} - 1\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}$$

Let us assume that $k_6 = \sum_{i=9}^{16}\left|I^*(Q_i)\right|$.

Theorem 6.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. If X is a finite set and I_D is a set of all idempotent elements of the semigroup $B_X(D)$, then $|I_D| = k_1 + k_6$.

7. In this paragraph we give a full description maximal subgroups of the Complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$.

Lemma 7.1. The number of automorphisms of those semilattices, which are defined by the diagrams 1), 2), 3), 4), 8), 13), 14) and 15) in fig. 2 is equal to 1, those semilattices which are defined by the diagrams 5), 6), 7), 9), 10) 11) and 16) in fig. 2 is equal to 2 and that semilattice which is defined by the diagram 12) in fig. 2 is equal to 4.

Theorem 7.1. For any idempotent binary relation ε of the semigroup $B_X(D)$, the order a subgroup $G_X(D,\varepsilon)$ of the semigroup $B_X(D)$ is one, or two, or four.

Chapter III . Regular Elements.

In this section gives full description of regular elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$. When X is a finite set, the formulas are derived, by means of which the number of regular elements of the semigroup is calculated.

Before describing the regular elements of the given semigroup $B_X(D)$, first we will derived the necessary and sufficient conditions of existence of semigroupregular element and when X is finite set, the calculation formula is received.

Lemma 8.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. Binary relation α having quazinormal representation of the form $\alpha = \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right) \cup \bigcup_{i=1}^{7}\left(Y_i^\alpha \times Z_i\right)$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$ is a regular element of the semigroup $B_X(D)$ iff for some complete $\alpha-$isomorphism $\varphi = \begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ \overline{Z}_7 & \overline{Z}_6 & \overline{Z}_5 & \overline{Z}_4 & \overline{Z}_3 & \overline{Z}_2 & \overline{Z}_1 & \overline{Z}_0 \end{pmatrix}$ of the semilattice D on some $XI-$subsemilattice $D' = \{\overline{Z}_7, \overline{Z}_6, \overline{Z}_5, \overline{Z}_4, \overline{Z}_3, \overline{Z}_2, \overline{Z}_1, \overline{Z}_0\}$ of the semilattice D satisfies the following conditions:

$$Y_7^\alpha \supseteq \overline{Z}_7,\ Y_6^\alpha \supseteq \overline{Z}_6,\ Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \overline{Z}_5,\ Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \overline{Z}_3,$$
$$Y_5^\alpha \cap \overline{Z}_5 \neq \varnothing,\ Y_3^\alpha \cap \overline{Z}_3 \neq \varnothing$$

Lemma 8.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$ and $|\Sigma_2(X,8)| = m_0$. If X be finite set and the $XI-$semilattice D and $D' = \{\bar{Z}_7, \bar{Z}_6, \bar{Z}_5, \bar{Z}_4, \bar{Z}_3, \bar{Z}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_0\}$ are $\alpha-$isomorphic, then $|R(D')| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{|\bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|\bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2|} - 1\right) \cdot 8^{|X \setminus \bar{Z}_0|}$.

8. In this pharagrap gives description of regular elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$.

Theorem 8.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. Then a binary relation α of $B_X(D)$ which a quasinormal representation one of the form given below is a regular element of this semigroup iff there exist a complete $\alpha-$isomorphism φ of the semilattice $V(D,\alpha)$ on some subsemilattice D' of the semilattice D that satisfies at least one of the followings:

1) $\alpha = X \times T$, where $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, where $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, where $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, where $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \breve{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times T' \cup T'')$, where $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, where $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$, $Z' \setminus Z \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_{Z'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$,

$Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$;

7) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$,

where $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$;

8) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$,

where $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus T' \neq \varnothing$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \varnothing$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \varnothing$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$;

Lemma 8.3. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_1)\right|$ can be calculated by the formula $\left|R^*(Q_1)\right| = 8$.

Lemma 8.4. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_2)\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_2)\right| = 19 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + 19 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} - 19 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Lemma 8.5. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_3)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}
\left|R^*(Q_3)\right| = {} & 18 \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 18 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 18 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 18 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 18 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 18 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 18 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 18 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\
& - 18 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 18 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_5|} \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_3|} \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}.
\end{aligned}$$

Lemma 8.6. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_4)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_4)\right| = 6\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ +6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ +6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ +6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ +6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ +6\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

Lemma 8.7. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_5)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_5)\right| == 14\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+14\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ +14\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+14\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\\ +14\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}-\\ -7\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ -7\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ -7\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ -7\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ -7\cdot 2^{|Z_5\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_2|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ -7\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_2|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|Z_5\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ -7\cdot 2^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ -7\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

Lemma 8.8. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_6)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_6\right)\right| &= 2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

Lemma 8.9. Let $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ and $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*\left(Q_7\right)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_7\right)\right| &= 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

Lemma 8.10. Let $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ and $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*\left(Q_8\right)\right|$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(D_8\right)\right| &= 2\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

Let us assume that $r_1=\sum_{i=1}^{8}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$.

Theorem 8.2. Let $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$, $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$. If X is a finite set and R_D is a set of all regular elements of the semigroup $B_X\left(D\right)$, then $\left|R_D\right|=r_1$.

In this case, when $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$, the set of all regular elements is a subsemigroup of the semigroup $B_X\left(D\right)$ which is defined by semilattices of the class $\Sigma_2\left(X,8\right)$.

9. In this pharagrap gives description of regular elements of the semigroup $B_X\left(D\right)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2\left(X,8\right)$, when $Z_7\cap Z_6=\varnothing,\ Z_7\cap Z_3\neq\varnothing,\ Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$.

Theorem 9.1. Let $D\in\Sigma_2\left(X,8\right)$ and $Z_7\cap Z_6=\varnothing,$ $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing,$ $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. Then a binary relation α of $B_X\left(D\right)$ which a quasinormal representation one of the form given below is a regular element of this semigroup iff there exist a complete $\alpha-$isomorphism φ of the semilattice

$V(D,\alpha)$ on some subsemilattice D' of the semilattice D that satisfies only one condition of the Theorem 8.1 and one of the followings:

9) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)$, where $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$;

10) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)$, where $T\in\{Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_T^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$;

11) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, where $T\in\{Z_2,Z_1\}$, $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$;

12) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, where $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$;

Lemma 9.1. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$ .If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_9)\right|$ can be calculated by the formula $\left|R^*(Q_9)\right|=2\cdot3^{|X\setminus Z_4|}$.

Lemma 9.2. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{10})\right|$ can be calculated by the formula $\left|R^*(Q_{10})\right|=6\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot4^{|X\setminus\breve{D}|}$.

Lemma 9.3. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{11})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{11})\right|=4\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_4|}-3^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+4\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_4|}-3^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}$$

Lemma 9.4. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{12})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{12})\right|=4\cdot 3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

Let us assume that $r_2=\sum_{i=9}^{12}\left|R^*(Q_i)\right|$.

Theorem 9.2. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_7\cap Z_6=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. If X is a finite set and R_D is a set of all regular elements of the semigroup $B_X(D)$, then $\left|R_D\right|=r_1+r_2$.

10. In this pharagrap gives description of regular elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$.

Theorem 10.1. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_6\cap Z_5\neq\varnothing$. Then a binary relation α of $B_X(D)$ which a quasinormal representation one of the form given below is a regular element of this semigroup iff there exist a complete $\alpha-$isomorphism φ of the semilattice $V(D,\alpha)$ on some subsemilattice D' of the semilattice D that satisfies only one condition of the Theorem 9.1 and one of the followings:

9) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times(T\cup T')\right)$, where $T,T'\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$;

10) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times(T\cup T')\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, where $T,T',T''\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

13) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3\times Z_3\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)$, where $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_3^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$;

14) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, where $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_3^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$;

15) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$,
where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$.

Lemma 10.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_9)\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_9)\right| = 4 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$$

Lemma 10.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{10})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{10})\right| = 8 \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Lemma 10.3. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{13})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|}$$

Lemma 10.4. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{14})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{14})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Lemma 10.5. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{15})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{15})\right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

Let us assume that $r_3 = \sum_{i=9}^{15} \left|R^*(Q_i)\right|$.

Theorem 10.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \varnothing$. If X is a finite set and R_D is a set of all regular elements of the semigroup $B_X(D)$, then $\left|R_D\right| = r_1 + r_3$.

11. In this pharagrap gives description of regular elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$.

Theorem 11.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. Then a binary relation α of $B_X(D)$ which a quasinormal representation one of the form given below is a regular element of this semigroup iff there exist a complete $\alpha-$isomorphism φ of the semilattice $V(D,\alpha)$ on some subsemilattice D' of the semilattice D that satisfies only one condition of the Theorem 9.1 and one of the followings:

9) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times(T\cup T')\right)$, where $T,T'\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$;

10) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times(T\cup T')\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, where $T,T',T''\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

13) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)$, where $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq\varphi(Z_5)$, $Y_5^\alpha\cap\varphi(Z_5)\neq\varnothing$.

14) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, where $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq\varphi(Z_5)$, $Y_5^\alpha\cap\varphi(Z_5)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$.

15) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, where $Y_7^\alpha,Y_6^\alpha,Y_5^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha\supseteq\varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha\supseteq\varphi(Z_6)$ $Y_7^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq\varphi(Z_5)$, $Y_7^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_5^\alpha\cap\varphi(Z_5)\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$.

Lemma 11.1. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_9)\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_9)\right|=4\cdot 3^{|X\setminus Z_4|}.$$

Lemma 11.2. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{10})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{10})\right|=8\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

Lemma 11.3. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{13})\right|$ can be calculated by the formula

$\left|R^*(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$.

Lemma 11.4. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{14})\right|$ can be calculated by the formula

$\left|R^*(Q_{14})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$

Lemma 11.5. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{15})\right|$ can be calculated by the formula

$\left|R^*(Q_{15})\right| = \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$

Let us assume that $r_4 = \sum_{i=9}^{15} \left|R^*(Q_i)\right|$.

Theorem 11.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set and R_D is a set of all regular elements of the semigroup $B_X(D)$, then $|R_D| = r_1 + r_4$.

12. In this pharagrap gives description of regular elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$.

Theorem 12.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. Then a binary relation α of $B_X(D)$ which a quasinormal representation one of the form given below is a regular element of this semigroup iff there exist a complete $\alpha-$isomorphism φ of the semilattice $V(D,\alpha)$ on some subsemilattice D' of the semilattice D that satisfies only one condition of the Theorem 9.1 and one of the followings:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$, where $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$;

10) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$, where $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$;

13) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_{T''}\times T''\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z_Z\right)$,
where $T,T',T'',Z\in D$, $\left(T\cup T'\right)\subset Z$, $T'\subset T''\subset Z$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $\left(T\cup T'\right)\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus\left(T\cup T'\right)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi(T'')$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

14) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$,
where $T,T',Z,$ $Z'\in D$, $Z\in\{Z_5,Z_3\}$, $Z'\in\{Z_2,Z_1\}$, $Z_4\subset Z'\subset\breve{D}$, $T'\subset Z\subset Z'$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $Z_4\setminus Z\neq\varnothing$, $Z\setminus Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_Z^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha\cap\varphi(Z)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\varphi\left(\breve{D}\right)\neq\varnothing$.

15) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times Z_T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_{T''\cup Z_4}^\alpha\times\left(T''\cup Z_4\right)\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$
where $T,T',T'',Z\in D$, $T''\in\{Z_5,Z_3\}$, $T\subset T''$, $T\cup T'=Z_4$, $\left(T''\cup Z_4\right)\cup Z=\breve{D}$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$, $T''\setminus Z_4\neq\varnothing$, $Z_4\setminus T''\neq\varnothing$, $\left(T''\cup Z_4\right)\setminus Z\neq\varnothing$, $Z\setminus\left(T''\cup Z_4\right)\neq\varnothing$ $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_Z^\alpha\notin\{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi(T'')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$, $Y_Z^\alpha\cap\varphi(Z)\neq\varnothing$.

Lemma 12.1. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*\left(Q_9\right)\right|$ can be calculated by the formula $\left|R^*\left(Q_9\right)\right|=6\cdot 3^{|X\setminus Z_4|}$

Lemma 12.2. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|$ can be calculated by the formula $\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|=10\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$

Lemma 12.3. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_6\cap Z_5=\varnothing$, $Z_7\cap Z_3=\varnothing$, $Z_5\cap Z_3\neq\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|$ can be calculated by the formula
$\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}$

Lemma 12.4. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{14})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{14})\right| = 2\cdot\left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+2\cdot\left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

Lemma 12.5. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{15})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{15})\right| = 2\cdot\left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+2\cdot\left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

Let us assume that $r_5 = \sum_{i=9}^{15}\left|R^*(Q_i)\right|$.

Theorem 12.2. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \varnothing$, $Z_7 \cap Z_3 = \varnothing$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \varnothing$. If X is a finite set and R_D is a set of all regular elements of the semigroup $B_X(D)$, then $|R_D| = r_1 + r_5$.

13. In this pharagrap gives description of regular elements of the semigroup $B_X(D)$ which are defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$.

Theorem 13.1. Let $D \in \Sigma_2(X,8)$ and $Z_5 \cap Z_3 = \varnothing$. Then a binary relation α of $B_X(D)$ which a quasinormal representation one of the form given below is a regular element of this semigroup iff there exist a complete $\alpha-$isomorphism φ of the semilattice $V(D,\alpha)$ on some subsemilattice D' of the semilattice D that satisfies only one condition of the Theorem 12.1 and one of the followings:

9) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$, where $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$;

13) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_{T''} \times T''\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z_Z\right)$, where $T, T', T'', Z \in D$, $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$;

16) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_6^\alpha\times Z_6\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times \breve{D}\right)$, where $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$ and satisfies the conditions: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(Z_5)$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$.

Lemma 13.1. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_9)\right|$ can be calculated by the formula $\left|R^*(Q_9)\right|=8\cdot 3^{|X\setminus Z_4|}$.

Lemma 13.2. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{13})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{13})\right|=4\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+4\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}.$$

Lemma 13.3. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$ and $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. If X is a finite set, then the number $\left|R^*(Q_{16})\right|$ can be calculated by the formula

$$\left|R^*(Q_{16})\right|=2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}.$$

Let us assume that $r_6=\sum_{i=9}^{16}\left|R^*(Q_9)\right|$.

Theorem 13.2. Let $D\in\Sigma_2(X,8)$, $Z_5\cap Z_3=\varnothing$. If X is a finite set and R_D is a set of all regular elements of the semigroup $B_X(D)$, then $\left|R_D\right|=r_1+r_6$..

APROVEMENT OF THE RESULTS OF THE THESIS

The outcomes of the research proposals have been published in 7 international journals, and have been reported at various international conferences and general seminars:

1)Of the international conference "MODERN ALGEBRA AND ITS APPLICATION"- Batumi, 2010, $XI-$Subsemilattice of the Semilattice of class $\Sigma_2(X,8)$.

2) Of the international conference "MODERN ALGEBRA AND ITS APPLICATION"- Batumi, 2011, Idempotent Elements of the Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$.

3)General Seminars at Department of mathematics, HACETTEPE University, Ankara, TURKEY, 2016, ,,Complete Semigroups of Binary Relations Defined By The Semilattices of a Class $\Sigma_2(X,8)$''.

4)General Seminars at Department of mathematics, CANAKKALE Onsekiz Mart University, Canakkale, TURKEY 2016. ,,Complete Semigroups of Binary Relations Defined By The Semilattices of a Class $\Sigma_2(X,8)$''.

The results obtained were discussed at the scientific workshops of the mathematics department of Batumi State University.

The Approbation of the results obtained in the dissertation was held at the enlarged of the mathematics department of Shota Rustaveli Batumi State University. The dissertation was approved and recommendations as to its defence were given.

APPENDIX

There are 7 appendixat the end of the dissertation work. First appendix contains the example, where the $\Sigma_2(X,8)$ class semilettices are constructed, when $|X| = 4$. In the following appendix for all 6 cases, the examples in case of finite set X, the elements of idempotent and regular elements of $B_X(D)$ semigroup given for the class semilettices are presented and it is shown that theoretical and practical calculations coincide.

WORKS

1. Tsinaridze Nino. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. **IJISET** – International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology, Vol. 3 Issue 1, January 2016, 162-171. www.ijiset.com;

2. Tsinaridze Nino, Makharadze Shota. Regular Elements of the Complete Semigroups $B_X(D)$ of Binary Relations of the Class $\Sigma_2(X,8)$. **Applied Mathematics**, 2015, 6, 447-455. www.scirp.org/journal/am http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.63042;

3. Tsinaridze Nino. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$. **Gen. Math. Notes**. Vol. 27, No. 2, April 2015, pp. 17-36. www.i-csrs.org, http://www.geman.in;
4. Tsinaridze Nino, Makharadze Shota, Fartenadze Guladi. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$ and Their Calculation Formulas. **Applied Mathematics**, 2015, 6, 2257-2278. http://www.scirp.org/journal/am
http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.614199;
5. Tsinaridze Nino, Diasamidze Yasha. Maximal Subcroups of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$. **IJESIT**- International Journal of Engineering Science and Innovative Technology, Vol. 4, Issue 6, November 2015, pp. 61-74. http://www.ijesit.com/archive/25/volume-4-issue-6november-2015.html;
6. Tsinaridze Nino. Subsemilattice of a Semilattice of Class $\Sigma_2(X,8)$. **Journal of Mathematical Sciences** Vol. 191, No. 6, june, 2013, pp. 871-875. http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-013-1367-9;
7. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino.** Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of The Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ and their calculation Formulas. **International Journal of Pure Mathematical Sciences** ISSN: 2297-6205. Vol. 16, pp 1-23. doi:10.18052/www.scipress.com/IJPMS.16.1.
8. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino,** Aidn Neset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X,10)$-*I*. **Applied Mathematics,** 2016, 7, 867-893, www.scirp.org /journal/am
http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.79078;
9. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino,** Aidn Neset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X,10)$-*II*. **Applied Mathematics**, 2016, 7, 894-907, www.scirp.org /journal/am
http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.79079;