

ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა
ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ნინო ცინარიძე

$\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული
ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები

(დისერტაცია წარდგენილია მათემატიკის დოქტორის აკადემიური
ხარისხის მოსაპოვებლად)

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი იაშა დიასამიძე

ბათუმი-2017

შინაარსი

შესავალი

| | |
|--|----|
| 1. თემის აქტუალობა..... | 5 |
| 2. ნაშრომის მიზნები, ამოცანები და შედეგები | |
| <i>ნაშრომის მიზანი და კვლევის საგანი.....</i> | 9 |
| <i>მეცნიერული სიახლე და ძირითადი შედეგები.....</i> | 10 |
| <i>კვლევის ზოგადი მეთოდოლოგია.....</i> | 11 |
| 3. დისერტაციის სტრუქტურა და მოცულობა..... | 11 |
| 4. ძირითადი აღნიშვნები..... | 11 |
| თავი I. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერების ქვენახევარმესერები | |
| 1.1. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის განმარტება..... | 13 |
| 1.2. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერების ყველა ქვენახევარმესერები..... | 16 |
| 1.3. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერების XI – ქვენახევარმესერები..... | 23 |
| თავი II. იდემპოტენტური ელემენტები | |
| 2.1. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტების აღწერა..... | 34 |
| 2.2. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... | 50 |
| 2.3. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... | 58 |
| 2.4. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... | 63 |

- 2.5. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... 68
- 2.6. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... 74
- 2.7. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... 80
- 2.8. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების მაქსიმალური ქვეჯგუფები 85

თავი III. რეგულარული ელემენტები

- 3.1. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების აღწერა..... 90
- 3.2. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... 104
- 3.3. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... 135
- 3.4. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... 143
- 3.5. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... 152

| | |
|---|-----|
| 3.6. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_x(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... | 161 |
| 3.7. $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_x(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები..... | 172 |
| დამატება 1..... | 181 |
| დამატება 2..... | 182 |
| დამატება 3..... | 194 |
| დამატება 4..... | 225 |
| დამატება 5..... | 245 |
| დამატება 6..... | 267 |
| დამატება 7..... | 311 |
| ლიტერატურა | 323 |

შესავალი

1. **თემის აქტუალობა.** ნახევარჯგუფი არის არაცარიელი სიმრავლე ერთი ბინარული ალგებრული ასოციაციური ოპერაციით. ნახევარჯგუფის ცნება იმდენად მარტივი და ბუნებრივია, რომ ძნელია იმის თქმა, თუ როდის წარმოიშვა პირველად. ჯგუფთა თეორიის მათემატიკურ თეორიად ჩამოყალიბების დროს არსებობდა კლეინის მოსაზრება, რომ საწყის ცნებად აეღოთ ის ცნება, რასაც ახლა ჩვენ ნახევარჯგუფს ვუწოდებთ. მაგრამ იმ ეტაპზე მათემატიკის წინაშე მდგარი ამოცანების გათვალისწინებით მოხდა უფრო ვიწრო, ჯგუფის ცნებაზე შეჩერება.

ტერმინი „ნახევარჯგუფი“ მათემატიკურ ლიტერატურაში პირველად გაჩნდა სეგიეს წიგნში. 1905 წელს გამოქვეყნებული დიკსონის პატარა სტატია იყო პირველი შრომა ნახევარჯგუფებში. თეორიის განვითარება არსებითად დაიწყო 1928 წელს, როცა გამოქვეყნდა ა.კ. სუმკევიჩის ძალიან მნიშვნელოვანი სტატია. მან აჩვენა, რომ (თუ ვისარგებლებთ თანამედროვე ტერმინოლოგიით) ყოველი სასრულო ნახევარჯგუფი შეიცავს „ბირთვს“ (ე.ი. მარტივ იდეალს) და სრულყოფილად განსაზღვრა სასრულო მარტივი იდეალების აგებულება.

სამწუხაროდ, სუმკევიჩის აღნიშნულ შედეგს გამოსაყენებლად მეტად მოუხერხებელი ფორმა ჰქონდა. ეს დეფექტი გამოსწორებული იქნა რისის (Rees) მიერ 1940 წელს ნულის მქონე ჯგუფზე მატრიცის ცნების შემოტანით. გარდა ამისა, მის მიერ შესწავლილი იქნა ნახევარჯგუფთა მეტად მნიშვნელოვანი „პრიმიტიული იდემ-პოტენტის მქონე მარტივი ნახევარჯგუფების“ კლასი.

რადგანაც ჯგუფთა ალგებრული თეორია არსებითად იყო მეცნიერება შებრუნებადი გარდაქმნების აბსტრაქტული სწავლების შესახებ, ამიტომ ასრულებდა მათემატიკის შემდგომ განვითარებაში მნიშვნელოვან როლს. ასეთი გარდაქმნების განხილვის აუცილებლობა გვხვდება მათემატიკის (და არა მარტო მათემატიკის) ძალიან ბევრ დისციპლინაში.

თუმცა, როგორი მნიშვნელოვანი და სასარგებლოც არ უნდა იყოს შექცევადი გარდაქმნის ზოგადი ცნება, მათემატიკური თეორიების განვითარებასთან ერთად აუცილებელი გახდა ისეთი გარდაქმნების განხილვა, რომლებიც საზოგადოდ შექცევადი

არ არიან. საჭირო გახდა შესაბამისი ცნებების ჩამოყალიბება, რომელსაც სწორედ ნახევარჯგუფის ცნება წარმოადგენს. მათემატიკაში ნახევარჯგუფთა ზოგადი თეორიის ძირითადი როლი მდგომარეობს იმაში, რომ იგი წარმოადგენს აბსტრაქტულ სწავლებას საზოგადოდ გარდაქმნების შესახებ.

ნახევარჯგუფთა თეორია არის თანამედროვე ალგებრის ერთ-ერთი აქტიურად განვითარებადი დარგი. მას მჭიდრო კავშირი აქვს სხვადასხვა მათემატიკურ დისციპლინებთან: დიფერენციალურ გეომეტრიასთან, ფუნქციონალურ ანალიზთან, გრაფთა, ავტომატთა და ალგორითმთა აბსტრაქტულ თეორიებთან.

ნახევარჯგუფთა თეორიაში მთელი რიგი მნიშვნელოვანი შედეგები დაკავშირებულია ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფებთან: კელის განზოგადებული თეორემა, კ.ა. ზარეცკის თეორემა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის განსაზღვრის შესახებ მჭიდროდ ჩადგმული იდეალებით, შაინ-მაკკენზის თეორემა ნებისმიერი ნახევარჯგუფის ბინარული მიმართებებით ზუსტი ტრანზიტული წარმოდგენის შესახებ. შაინის, შვარცის, ტამურას, კლიფფორდის, ბალტერის შედეგები და სხვ.

ვინაიდან ნებისმიერი ნახევარჯგუფი შეიძლება იზომორფულად ჩავდგათ ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფში, რომლებიც განსაზღვრულია გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერით, ამიტომ მოცემული ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფთა შესწავლით ზოგადად ნახევარჯგუფები შეისწავლება. გარდა ამისა, იდემპოტენტური ელემენტები, ცალმხრივი ერთეულები, გარე ელემენტები უდიდეს როლს თამაშობენ ნახევარჯგუფის აბსტრაქტული თვისებების შესწავლაში.

როგორც ცნობილია, ბინარული მიმართების ცნება წარმოადგენს მათემატიკის ერთ-ერთ ძირითად ცნებას. ბინარული მიმართების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ერთი სიმრავლის მეორე სიმრავლეში ასახვა.

ბინარულ მიმართებათა თეორიის პირველი ძირითადი ცნებები შემოტანილი იქნა დე მორგანის, პირსისა და ფრეგეს შრომებში, რომლებიც ეძღვნებოდა მათემატიკურ ლოგიკას. XIX საუკუნის ოთხმოცდაათიან წლებში ე. შრედერმა თავისი წიგნის „ლოგიკის ალგებრა“ მესამე ტომში მოგვცა ბინარულ მიმართებათა სისტემატური გადმოცემა.

ცნობილია, რომ მიმართებათა ალგებრა, ბულის მატრიცთა ალგებრა და მესერთა თეორია მჭიდროდ არიან დაკავშირებული ერთმანეთთან. მიმართებათა თეორიის პრობლემები შეიძლება გადაიჭრას გრაფთა თეორიის, ბულის მატრიცთა ალგებრის და მესერთა თეორიის მეთოდებით, ხოლო მიმართებათა ალგებრის მეთოდებით შეიძლება გადაიჭრას ასევე მესერთა და გრაფთა თეორიისა და ბულის მატრიცთა ალგებრის ზოგიერთი პრობლემა.

ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის შესწავლის სირთულე დაკავშირებულია იმასთან, რომ ისინი როგორც წესი არ წარმოადგენენ რეგულარულ ნახევარჯგუფებს, რაც ტექნიკურად აძნელებს მათ შესწავლას. ამასთან დაკავშირებით მეტად საინტერესო აღმოჩნდა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფებისა და მათი ზოგიერთი მნიშვნელოვანი კლასების სისტემატური შესწავლა გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერების გამოყენებით, რომელიც პირველად გამოყენებული იქნა იაშა დიასამიძის მიერ თავის სადისერტაციო ნაშრომში (იხ. [68]). ეს არის ახალი მიმართულება, რომელსაც წარმოადგენილი მონოგრაფია ეძღვნება. მოკლედ აღვწეროთ ეს მეთოდი:

კერძოდ, D სიმბოლოთი აღვნიშნოთ არაცარიელი X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი არაცარიელი სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია D სიმრავლის ელემენტების თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციის მიმართ. მას გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერი ეწოდება. f იყოს X სიმრავლის D სიმრავლეში ნებისმიერი ასახვა. ყოველ ასეთ f ასახვას შევუსაბამოთ $\alpha_f = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე. ყველა ასეთი α_f ($f: X \rightarrow D$) ბინარული მიმართებების სიმრავლე აღვნიშნოთ $B_X(D)$ სიმბოლოთი. მტკიცდება, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფია. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი ეწოდება.

ცნობილია, რომ ნებისმიერი S ნახევარჯგუფისათვის არსებობს ისეთი X სიმრავლე და D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერი, რომ S ნახევარჯგუფი იზომორფულია ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რომელიმე

ქვენახევარჯგუფისა. აქედან გამომდინარეობს, რომ ამ ტიპის ნახევარჯგუფებს მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ნახევარჯგუფთა თეორიაში.

ვთქვათ $\Sigma_n(X, m)$ არის m სიმძლავრის მქონე ყველა გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერების კლასი. D_1, D_2, \dots, D_n ისეთი ელემენტებია $\Sigma(X, m)$ კლასიდან, რომელთაგან არცერთი ორი ერთმანეთის იზომორფული არ არის. საზოგადოდ $\Sigma_k(X, m)$ სიმბოლოთი აღინიშნება $\Sigma(X, m)$ კლასის ქვეკლასი, რომლის ყოველი ელემენტი იზომორფულია ფიქსირებული $D_k (1 \leq k \leq n)$ გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერისა. ასევე ცნობილია, რომ თუ $\emptyset \in D$ და თუ $B_X(D_1)$ და $B_X(D_2)$ ნახევარჯგუფები, რომლებიც განსაზღვრული არიან D_1 და D_2 გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერებით, ერთმანეთის იზომორფულია, მაშინ ასევე იზომორფული იქნებიან D_1 და D_2 ნახევარმესერები, როგორც ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეები თეორიულ-სიმრავლური ჩართვის მიმართ (იხ. [68], თეორემა 5.6.1). აქედან გამომდინარეობს, რომ ნახევარჯგუფთა კლასი, რომლებიც განსაზღვრული არიან $\Sigma_k(X, m)$ კლასის ნახევარმესერებით ჩაკეტილი არიან მათი იზომორფული სახეების მიმართ. მათი აბსტრაქტული თვისებები ძირითადად განისაზღვრებიან D ნახევარმესერის თვისებებით.

გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერების გამოყენებით ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების შესწავლაში და მიღებული შედეგების გავრცელების საქმეში დიდი წვლილი აქვს შეტანილი შ. მახარაძეს.

ამ მიმართულებით ფიზიკა-მატემატიკის მეცნიერებათა ხარისხები დაიცვეს ზებური ავალიანმა, გულადი ფარტენაძემ, ომარი გივრაძემ და ნ. როყვამ. მათემატიკის აკადემიური დოქტორის ხარისხები თურქეთის რესპუბლიკაში დაიცვეს დიდემ იეშილმა და ბარიშ ალბაირაკმა. დღეისათვის ამ ტიპის ნახევარჯგუფებზე 60-ზე მეტი ნაშრომია მიძღვნილი.

ზებურ ავალიანს შესწავლილი აქვს $\Sigma_1(X, 5)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 1);

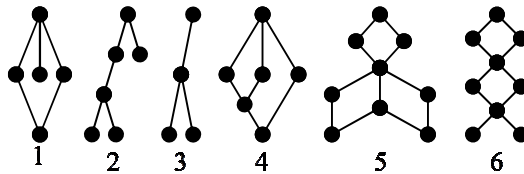
გულადი ფარტენადეს შესწავლილი აქვს $\Sigma_1(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 2);

ომარ გივრამეს შესწავლილი აქვს $\Sigma_1(X,4)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 3);

ნინო როყვას შესწავლილი აქვს $\Sigma_3(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 4);

დიდემ იეშილს შესწავლილი აქვს $\Sigma_2(X,9)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 5);

ბარიშ ალბაირაქს შესწავლილი აქვს $\Sigma_1(X,9)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები (იხ. დიაგრამა 6).



2. ნაშრომის მიზნები, ამოცანები და შედეგები

ნაშრომის მიზანი და კვლევის საგანი. სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი მიზანია იმ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების შესწავლა (ე.ი., ისეთი თვისებების შესწავლა, რომლებიც ინახებიან იზომორფიზმის დროს), რომლებიც განსაზღვრული არიან $\Sigma_2(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერებით.

კვლევის საგანს წარმოადგენს $\Sigma_2(X,8)$ კლასის გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერები, რადგანაც მოცემული ნახევარმესერები, როგორც შემდგომში კვლევები გვიჩვენებენ, ატარებენ მნიშვნელოვან ინფორმაციას იმ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების შესახებ, რომლებსაც ისინი განსაზღვრავენ. აგრეთვე კვლევის საგანს

წარმოადგენენ მოცემული ნახევარმესერებით განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები.

მეცნიერული სიახლე და ძირითადი შედეგები. ნაშრომში პირველად განიხილება იმ ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის კლასები, რომლებიც განსაზღვრულია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით. გამოკვლეულია მოცემული კლასის ნახევარმესერების თვისებები შესაბამისი დიაგრამის მიხედვით.

როცა X სასრული სიმრავლეა, გამოყვანილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასში ნახევარმესერების რაოდენობის დათვლის ფორმულა, აღწერილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ყველა ქვენახევარმესერები და გამოყოფილია მათგან XI – ქვენახევარმესერები.

შესწავლილია $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ყოველი D ნახევარმესერით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

მარჯვენა ერთეულები;

იდემპოტენტური ელემენტები;

მაქსიმალური ქვეჯგუფები;

რეგულარული ელემენტები და მათი თვისებები;

როცა X სასრული სიმრავლეა, გამოყვანილია იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტების რაოდენობის დათვლის ფორმულები.

აღნიშნული საკითხების შესწავლა ეყრდნობა გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერის თვისებებს. აღმოჩნდა, რომ ნახევარჯგუფთა კლასების ამ მეთოდით შესწავლა ძალიან ეფექტურია. ნაშრომში მიღებული შედეგები კი საშუალებას იძლევიან ამ ნახევარჯგუფის განმსაზღვრელი ნახევარმესერის დიაგრამაზე დაყრდნობით ვილაპარაკოთ მოცემული ნახევარჯგუფის დამახასიათებელ მრავალ თვისებაზე. კერძოდ, გააჩნია თუ არა ნახევარჯგუფს მარჯვენა ერთეულები, როგორაა აგებული მისი იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები, მაქსიმალური ქვეჯგუფები და სხვა.

კვლევის ზოგადი მეთოდოლოგია. როგორც ცნობილია ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები, ცალმხრივი ერთეულები, რეგულარული ელემენტები, მაქსიმალური ქვეჯგუფები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ნახევარჯგუფთა აბსტრაქტული თვისებების შესწავლაში. გამომდინარე აქედან, ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების კლასების შესწავლისას დიდი ყურადღება ექცევა ნახევარჯგუფში ზემოთ ჩამოთვლილი საკითხების შესწავლას.

სადისერტაციო ნაშრომში ნახევარჯგუფთა თვისებების შესწავლა ხდება ნახევარმესერთა თვისებების საშუალებით. ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების მნიშვნელოვანი ნაწილი ძირითადად განისაზღვრება იმ გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერებით, რომლებიც განსაზღვრავენ მოცემული კლასის ელემენტებს.

ნაშრომში გამოიყენება მესერთა თეორიის, ნახევარჯგუფთა თეორიის, სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ზოგადი მეთოდი.

3. დისერტაციის სტრუქტურა და მოცულობა.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, 3 თავის, ამ თავებში შემავალი 18 პარაგრაფისა და 7 დანართისაგან. ნაშრომის საერთო მოცულობა არის კომპიუტერით დაკაზმდონებული 329 გვერდი (მათგან 180 გვერდი ნაშრომის ძირითადი ნაწილია, დანარჩენი კი დამატებები).

4. ძირითადი აღნიშვნები

შემოვიღოთ ძირითადი აღნიშვნები, რომლებიც შემდგომში დისერტაციაშია გამოყენებული.

სიმბოლო \emptyset -ით აღვნიშნოთ ცარიელი ბინარული მიმართება ან X სიმრავლის ცარიელი ქვესიმრავლე;

$$B_X(D) = \{ \alpha_f \mid f : X \rightarrow D \};$$

$$(x, y) \in \alpha \text{ პირობას შემდგომში ჩავწერთ შემდეგი ფორმით } x \alpha y;$$

ახლა ვთქვათ $(x, y) \in X$, $Y \subseteq X$, $\alpha \in B_x(D)$, $T \in D$, $\emptyset \neq D' \subseteq D$, $t \in \check{D} = \bigcup_{Y \in D} Y$ (\check{D} არის

D სიმრავლის უდიდესი ელემენტი). შემოვიღოთ აგრეთვე შემდეგი აღნიშვნები:

$$y\alpha = \{x \in X \mid y\alpha x\};$$

$$Y\alpha = \bigcup_{y \in Y} y\alpha;$$

$$V(D, \alpha) = \{Y\alpha \mid Y \in D\};$$

$$X^* = \{T \mid \emptyset \neq T \subseteq X\};$$

$$D'_t = \{Z' \in D' \mid t \in Z'\};$$

$$Y_t^\alpha = \{x \in X \mid x\alpha = T\};$$

$$D'_T = \{Z' \in D' \mid T \subseteq Z'\};$$

$$\check{D}'_T = \{Z' \in D' \mid Z' \subseteq T\};$$

$$I(D', T) = \cup(D' \setminus D'_T);$$

$\wedge(D, D_t)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ D_t სიმრავლის ქვედა საზღვრების სიმრავლე D

ნახევარმესერში.

თავი I

$\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერების ქვენახევარმესერები

ამ თავში ჩვენ განვმარტავთ $\Sigma_2(X, 8)$ კლასს, აღვწერთ მოცემული კლასის ნახევარმესერების ყველა ქვენახევარმესერებს, შემდგომში მარჯვენა ერთეულების, იდეპოტენტური ელემენტების, რეგულარული ელემენტების აღწერისათვის საჭიროა მოცემული ქვენახევარმესერებიდან XI – ქვენახევარმესერების გამოყოფა, რადგან არსებობს თეორემა, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ შეიცავს მარჯვენა ერთეულს, როცა D არის XI – ნახევარმესერი (იხ. [68] თეორემა 6.1.3).

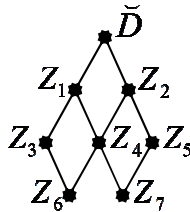
1.1. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის განმარტება და მისი სიმძლავრის

გამოსათვლელი ფორმულა

ვთქვათ $X \neq \emptyset$. $\Sigma_2(X, 8)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ გაერთიანების X – ნახევარმესერთა კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი რომელიღაც $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$ გაერთიანების X – ნახევარმესერის იზომორფულია და რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned}
 & Z_6 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \check{D}, Z_6 \subset Z_4 \subset Z_1 \subset D, Z_6 \subset Z_4 \subset Z_2 \subset \check{D}, \\
 & Z_7 \subset Z_4 \subset Z_1 \subset \check{D}, Z_7 \subset Z_4 \subset Z_2 \subset \check{D}, Z_7 \subset Z_5 \subset Z_2 \subset \check{D}, \\
 & Z_7 \cup Z_6 = Z_4, Z_5 \cup Z_4 = Z_2, Z_4 \cup Z_3 = Z_1, Z_2 \cup Z_1 = \check{D}, \\
 & Z_1 \setminus Z_2 \neq \emptyset, Z_2 \setminus Z_1 \neq \emptyset, Z_3 \setminus Z_4 \neq \emptyset, Z_4 \setminus Z_3 \neq \emptyset, \\
 & Z_3 \setminus Z_5 \neq \emptyset, Z_5 \setminus Z_3 \neq \emptyset, Z_4 \setminus Z_5 \neq \emptyset, Z_5 \setminus Z_4 \neq \emptyset, \\
 & Z_6 \setminus Z_7 \neq \emptyset, Z_7 \setminus Z_6 \neq \emptyset.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

D ნახევარმესერი, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობებს მოცემულია ნახაზი 1-ზე.



ნახაზი 1.

D ნახევარმესერის დიაგრამა.

ახლა განვიხილოთ [68]-ლიტერატურიდან 11.4 პუნქტი, რომელიც ჩამოვყალიბოთ შემდეგი თეორემის სახით.

თეორემა 1.1.1. ვთქვათ $D = \{\check{D}, Z_1, Z_2, \dots, Z_{m-1}\}$ გაერთიანებათა რომელიღაც სრული X -ნახევარმესერია, ხოლო $C(D) = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}\}$ არის X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ქვესიმრავლეთა რაღაც ოჯახი. თუ φ არის D ნახევარმესერის $C(D)$ სიმრავლეთა ოჯახზე ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\varphi(\check{D}) = P_0$ და $\varphi(Z_i) = P_i$ ნებისმიერი $i = 1, 2, \dots, m-1$ და $\hat{D}_Z = D \setminus \{T \in D \mid Z \subseteq T\}$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} \check{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{m-1}, \\ Z_i &= P_0 \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_i} \varphi(T) \end{aligned} \quad (1.2)$$

ამ ტოლობებს შემდეგში ფორმალური ტოლობები ეწოდება.

მტკიცდება, რომ D ნახევარმესერის ელემენტების (1.2) წარმოდგენისას P_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1$) პარამეტრებს შორის არსებობს ისეთები, რომლებიც მოცემული D ნახევარმესერისათვის არ შეიძლება იყვნენ ცარიელი სიმრავლეები. ასეთ P_i ($0 < i \leq m-1$) სიმრავლეებს ბაზისური წყაროები ეწოდება და შემდგომში მათ რიცხვს აღვნიშნავთ δ სიმბოლოთი, ხოლო იმ P_j ($0 \leq j \leq m-1$) პარამეტრებს, რომლებიც შეიძლება იყვნენ ცარიელი სიმრავლეებიც, სისავსის წყაროები ეწოდება.

მტკიცდება, რომ φ ასახვისას ბაზისური წყაროს წინასახის დამფარავი ელემენტების რაოდენობა ყოველთვის ერთი ტოლია, ხოლო სისავსის წყაროების დამფარავი ელემენტები ან არ არსებობენ, ან მათი რაოდენობა მეტია ერთზე. \square

ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$ (იხ. ნახ 1), $C(D) = \{P_7, P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0\}$ არის X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ქვესიმრავლეთა რაღაც სიმრავლე და

$$\psi = \begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \check{D} \\ P_7 & P_6 & P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}$$

არის ასახვა D ნახევარმესერის $C(D)$ სიმრავლეში, მაშინ მოცემული ნახევარმესერის ელემენტებისათვის ფორმალურ ტოლობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
 \check{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
 Z_1 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
 Z_2 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
 Z_3 &= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
 Z_4 &= P_0 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \\
 Z_5 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7 \\
 Z_6 &= P_0 \cup P_5 \cup P_7 \\
 Z_7 &= P_0 \cup P_3 \cup P_6
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

სადაც P_1, P_2, P_3, P_5 ელემენტები არიან D ნახევარმესერის ბაზისური წყაროები, ხოლო P_0, P_4, P_6, P_7 - სისავსის წყაროები. ამიტომ $|X| \geq 4$ და $\delta = 4$ (იხ. თეორემა 1.1.1).

თეორემა 1.1.2. ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა, δ და q სიმბოლოებით შესაბამისად აღნიშნულია D ნახევარმესერის ყველა ბაზისურ წყაროთა რაოდენობა და D ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმთა რაოდენობა. თუ $|X| = n \geq \delta$ და $|\Sigma_n(X, m)| = s$, მაშინ

$$s = \frac{1}{q} \cdot \sum_{p=\delta}^m \left(\sum_{i=1}^{p+1} \left(\frac{(-1)^{p+i+1} \cdot C_{m-\delta}^{p-\delta} \cdot C_p^\delta \cdot (\delta!) \cdot ((p-\delta)!) \cdot i^n}{(i-1)! \cdot (p-i+1)!} \right) \right),$$

სადაც $C_j^k = \frac{j!}{k! \cdot (j-k)!}$ (იხ. [68], თეორემა 11.5.1).

ლემა 1.1.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $|\Sigma_2(X, 8)| = s$ და $|X| \geq \delta \geq 4$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$s = \frac{1}{2} \cdot (9^n - 4 \cdot 8^n + 6 \cdot 7^n - 4 \cdot 6^n + 5^n)$$

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში გვექნება: $m = 8$, $\delta = 4$, ავტომორფიზმთა რაოდენობა $q = 2$, (იხ. ლემა 2.8.1), მაშინ თეორემა 1.1.2-ის თანახმად გვექნება:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=4}^8 \left(\sum_{i=1}^{p+1} \left(\frac{(-1)^{p+i+1} \cdot C_4^{p-4} \cdot C_p^4 \cdot (4!) \cdot ((p-4)!) \cdot i^n}{(i-1)! \cdot (p-i+1)!} \right) \right),$$

სადაც $C_j^k = \frac{j!}{k! \cdot (j-k)!}$. ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$s = \frac{1}{2} \cdot (9^n - 4 \cdot 8^n + 6 \cdot 7^n - 4 \cdot 6^n + 5^n)$$

ლემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1.1.1. ვთქვათ $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, მაშინ შესაბამისად

$$s = 12, 420, 8\ 880, 73\ 500, 1\ 049\ 706, 13\ 578\ 390, 163\ 642\ 380$$

(იხ. დამატება 1) და

$$B_X(D) = 4\ 096, 32\ 768, 262\ 144, 2\ 097\ 152, 16\ 777\ 216, 134\ 217\ 728, 1\ 073\ 741\ 824.$$

მოცემული რიცხვები გვიჩვენებს, რომ მაგალითად, თუ $|X|=10$, მაშინ მოცემული კლასის ყველა ნახევარჯგუფთა ელემენტების რაოდენობა 163 642 380-ის ტოლია, ხოლო ელემენტების რაოდენობა თითოეულ ნახევარჯგუფში, რომელიც მოცემულ კლასს მიეკუთვნება 1 073 741 824-ის ტოლია.

1.2. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერის ყველა

ქვენახევარმესერები

ახლა აღვწეროთ $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ყველა ქვენახევარმესერი.

ლემა 1.2.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$, მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან

$D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ ნახევარმესერის ყველა ქვენახევარმესერი:

1) $\{Z_7\}, \{Z_6\}, \{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი2-ზე);

2) $\{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა2 ნახაზი2-ზე);

$\{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\},$

3) $\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა3 ნახაზი2-ზე);

- 4) $\{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა4 ნახაზი 2-ზე);
- 5) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\},$
 $\{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა5 ნახაზი2-ზე);
- 6) $\{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი2-ზე);
- 7) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი2-ზე);
- 8) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი2-ზე);
- 9) $\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_2\},$
 $\{Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_2, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი2-ზე);
- 10) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა10 ნახაზი2-ზე);
- 11) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა11 ნახაზი2-ზე);
- 12) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა12 ნახაზი2-ზე);
- 13) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\},$
 $\{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი2-ზე);
- 14) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა14 ნახაზი2-ზე);
- 15) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა15 ნახაზი2-ზე);
- 16) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა16 ნახაზი2-ზე);
- 17) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა17 ნახაზი2-ზე);
- 18) $\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა18 ნახაზი2-ზე);

- 19) $\{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა 19 ნახაზი 2-ზე);
- 20) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა 20 ნახაზი 2-ზე);
- 21) $\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა 21 ნახაზი 2-ზე);
- 22) $\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა 22 ნახაზი 2-ზე);
- 23) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა 23 ნახაზი 2-ზე);
- 24) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა 24 ნახაზი 2-ზე);

დამტკიცება: ცხადია, რომ ერთელემენტური სიმრავლები

$$\{Z_7\}, \{Z_6\}, \{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\bar{D}\}$$

წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერებს.

D ნახევარმესერის ყველა ორელემენტური ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^2 = 28$. ეს ქვესიმრავლებია:

$$\begin{aligned} &\{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \bar{D}\}, \\ &\{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_1, \bar{D}\}, \\ &\{Z_7, Z_6\}, \{Z_7, Z_3\}, \{Z_6, Z_5\}, \{Z_5, Z_4\}, \{Z_5, Z_3\}, \{Z_5, Z_1\}, \{Z_4, Z_3\}, \{Z_3, Z_2\}, \{Z_2, Z_1\}. \end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ ბოლო ცხრა სიმრავლე არ წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერებს.

D ნახევარმესერის ყველა სამელემენტური ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^3 = 56$. ეს ქვესიმრავლებია:

$$\begin{aligned} &\{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\}, \\ &\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\}, \\ &\{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \\ &\{Z_5, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\ &\{Z_7, Z_6, Z_5\}, \{Z_7, Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4\}, \{Z_7, Z_5, Z_3\}, \\ &\{Z_7, Z_6, Z_5\}, \{Z_7, Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4\}, \{Z_7, Z_5, Z_3\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4\}, \{Z_6, Z_5, Z_3\}, \\ & \{Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3\}, \{Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_2, Z_1\}, \{Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_5, Z_4, Z_1\}, \\ & \{Z_5, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_4, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1\}, \\ & \{Z_3, Z_2, Z_1\}. \end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ ბოლო ოცდაცხრა სიმრავლე არ წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერებს.

D ნახევარმესერის ყველა ოთხელემენტთან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^4 = 70$. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$\begin{aligned} & \{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \\ & \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\ & \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \\ & \{Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\ & \{Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\ & \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3\}, \\ & \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_1, \bar{D}\}, \\ & \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, \bar{D}\}, \\ & \{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \\ & \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, \bar{D}\}, \\ & \{Z_6, Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1\}, \\ & \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \\ & \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_4, Z_3, Z_2, \bar{D}\}. \end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ ბოლო ორმოცდაოთხი სიმრავლე არ წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერებს.

D ნახევარმესერის ყველა ხუთელემენტთან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^5 = 56$. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$\begin{aligned} & \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \\ & \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \\
& \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}, \\
& \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \\
& \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \\
& \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}.
\end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ ბოლო ოცდაჩვიდმეტი სიმრავლე არ წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერებს.

D ნახევარმესერის ყველა ექვსელემენტთან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^6 = 28$. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$\begin{aligned}
& \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \\
& \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \bar{D}\}.
\end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ ბოლო თვრამეტი სიმრავლე არ წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერებს.

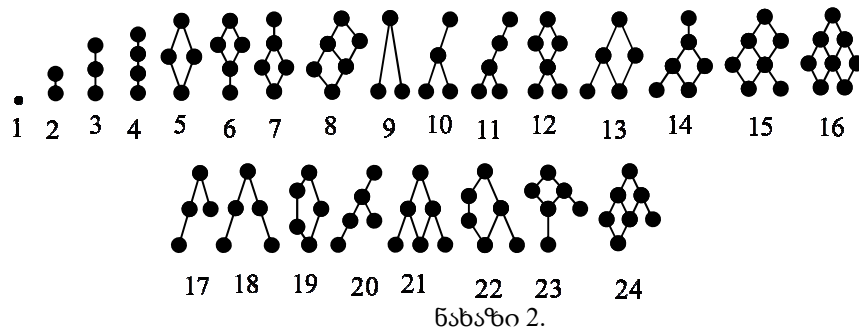
D ნახევარმესერის ყველა შვიდელემენტთან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა $C_8^7 = 8$. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$\begin{aligned} & \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \check{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}, \\ & \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}, \\ & \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}, \\ & \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \check{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \check{D}\}. \end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ ზოლო ოთხი სიმრავლე არ წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერებს.

ლემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული ლემიდან გამომდინარეობს, რომ ნახ. 2-ზე ნაჩვენები დიაგრამებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა ქვენახევარმესერის დიაგრამები.



D ნახევარმესერის ყველა ქვენახევარმესერთა დიაგრამები.

შემოვიღოთ XI - ნახევარმესერის ცნება.

განმარტება 1.2.1. თუ D ისეთი გაერთიანებათა სრული X - ნახევარმესერია, რომელიც ერთდროულად აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

- a) $\wedge(D, D_i) \in D$ ყოველი $t \in \check{D}$;
- b) $Z = \bigcup_{t \in Z} \wedge(D, D_t)$, ნებისმიერი არაცარიელი $Z \in D$ ელემენტისათვის,

მაშინ D -ს გაერთიანებათა სრული XI - ნახევარმესერი ეწოდება (იხ. [68], განმარტება 1.14.2).

ახლა ნახაზი 2-ის დიაგრამებიდან გამოვრიცხოთ ის დიაგრამები, რომლებიც არ წარმოადგენენ XI - ნახევარმესერის დიაგრამებს.

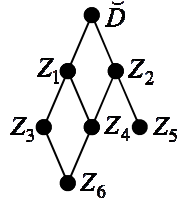
ლემა 1.2.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, მაშინ ნახ. 2-ზე ნაჩვენები 17-24 დიაგრამებით განსაზღვრული არცერთი ქვენახევარმესერი არ წარმოადგენს XI – ნახევარმესერს.

დამტკიცება: მოცემული ლემა დავამტკიცოთ ნახაზი 2-ის 17-24 დიაგრამებით განსაზღვრული ნახევარმესერებიდან ერთ-ერთი ნახევარმესერისთვის, მაგალითად ვაჩვენოთ, რომ 24-ე დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერი არ წარმოადგენს XI – ნახევარმესერს, დანარჩენი შემთხვევები დამტკიცდება ანალოგიურად.

ვთქვათ $D' = \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$ და $C(D') = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ არის სიმრავლეთა ოჯახი, სადაც $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ არიან X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები და

$$\psi = \begin{pmatrix} \check{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{pmatrix}$$

არის ასახვა D' ნახევარმესერისა $C(D')$ სიმრავლეში, მაშინ მოცემული D' (იხ. ნახაზი 3) ნახევარმესერის ელემენტებისათვის ფორმალურ ტოლობებს ექნებათ შემდეგი სახე:



ნახაზი 3.

D' ნახევარმესერის დიაგრამა

$$\begin{aligned} \check{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \\ Z_1 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \\ Z_2 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \\ Z_3 &= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \\ Z_4 &= P_0 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_6 \\ Z_5 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \\ Z_6 &= P_0 \cup P_5 \end{aligned} \tag{1.4}$$

სადაც P_1, P_2, P_3, P_5 ელემენტები წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ბაზისურ წყაროებს, ხოლო P_0, P_4, P_6 -სისავსის წყაროებს, ამიტომ $|X| \geq 4$ და $\delta = 4$ (იხ. თეორემა 1.1.1). მაშინ ფორმალური ტოლობებიდან გვექნება:

$$D'_t = \begin{cases} D', & \text{if } t \in P_0, \\ \{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_1, \\ \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_2, \\ \{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_3, \\ \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_4, \\ \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_5, \\ \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_6, \end{cases} \quad \wedge(D', D'_t) = \begin{cases} Z_5, & \text{if } t \in P_1, \\ Z_3, & \text{if } t \in P_2, \\ Z_6, & \text{if } t \in P_5. \end{cases}$$

მივიღეთ, რომ $D'^{\wedge} = \{\wedge(D', D'_t) \mid t \in \bar{D}\} = \{Z_6, Z_5, Z_3\}$ და $\wedge(D', D'_t) \notin D'$, თუ $t \in P_0 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \supseteq P_3 \neq \emptyset$, რადგანაც P_3 არის ბაზისური წყარო. ამიტომ განმარტება 1.2.1-დან გამომდინარეობს, რომ D' ნახევარმესერის 24-ე დიაგრამით განსაზღვრული ქვენახევარმესერი არ წარმოადგენს XI – ს.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ნახ. 2-ზე ნაჩვენები 17-24 დიაგრამებით განსაზღვრული არცერთი ქვენახევარმესერი არ წარმოადგენს XI – ქვენახევარმესერს.

ლემა დამტკიცებულია.

1.3. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერების

XI – ქვენახევარმესერები

ახლა აღვწერთ $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ყველა XI-ქვენახევარმესერი. მოცემულ კლასში XI – ქვენახევარმესერების აღწერისას გამოიყო 6 შემთხვევა, ესენია:

- 1) $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$;
- 2) $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$;
- 3) $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$;
- 4) $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$;
- 5) $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$;
- 6) $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$.

ამიტომ თითოეული შემთხვევისთვის ცალკ-ცალკე აღწერილია მოცემული კლასის XI-ქვენახევარმესერები. მანამდე კი განვიხილოთ შემდეგი თეორემები.

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 1$) არის D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომლისთვისაც $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_m$, მაშინ Q ყოველთვის იქნება გაერთიანებათა XI-ნახევარმესერი (იხ. [68], თეორემა 11.6.1).

თეორემა 1.3.2. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომლისთვისაც $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_1 \cup T_2 = T_3$ და $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$, მაშინ Q იქნება გაერთიანებათა XI-ნახევარმესერი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ (იხ. [68], თეორემა 11.6.2).

თეორემა 1.3.3. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი და j არის ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი, რომ $0 \leq j \leq m-3$ და

$$\begin{aligned} T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3} \end{aligned}$$

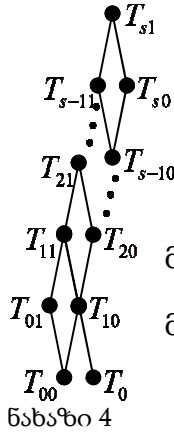
მაშინ Q ყოველთვის იქნება გაერთიანებათა XI-ნახევარმესერი (იხ. [68], თეორემა 11.6.3).

თეორემა 1.3.4. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 5$) არის D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომლისთვისაც

$$\begin{aligned} T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \\ T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \\ T_3 \setminus T_4 \neq \emptyset, T_4 \setminus T_3 \neq \emptyset, T_1 \cup T_2 = T_3, T_3 \cup T_4 = T_5 \end{aligned}$$

მაშინ Q იქნება გაერთიანებათა XI-ნახევარმესერი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $T_1 \cap T_4 = \emptyset$ (იხ. [68], თეორემა 11.6.4).

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 6$) არის D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომლისთვისაც



$$\begin{aligned}
 &T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \quad T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \\
 &T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \\
 &T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, \quad T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \quad T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, \quad T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset, \\
 &T_1 \cup T_2 = T_3, \quad T_4 \cup T_5 = T_6
 \end{aligned}$$

მაშინ Q იქნება გაერთიანებათა XI -ნახევარმესერი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ (იხ. [68], თეორემა 11.6.5).

ნახაზი 4
 Q_1 ნახევარმესერის დიაგრამა

თეორემა 1.3.6. თუ Q არის ბადე, მაშინ ის ყოველთვის იქნება გაერთიანებათა XI -ნახევარმესერი (იხ. [68], თეორემა 11.7.2).

თეორემა 1.3.7. ვთქვათ Q_1 არის ისეთი ნახევარმესერი, რომლის დიაგრამა მოცემულია მე-4 ნახაზზე, მაშინ Q_1 არის გაერთიანებათა XI -ნახევარმესერი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $T_0 \cap T_{01} = \emptyset$ (იხ. [68], ლემა 13.10.1). \square

ლემა 1.3.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$, მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა XI -ქვენახევარმესერი:

- 1) $\{\bar{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\}$ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი 5-ზე);
- 2) $\{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა2 ნახაზი5-ზე);
- 3) $\{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა3 ნახაზი5-ზე);
- 4) $\{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა4 ნახაზი5-ზე);

$$5) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \\ \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა5 ნახაზი5-ზე);

$$6) \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი5-ზე);}$$

$$7) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი5-ზე);}$$

$$8) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი5-ზე).}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.1-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.3-დან, ხოლო 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.6-დან.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.3.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$, მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა XI – ქვენახევარმესერი:

$$1) \{\bar{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\} \text{ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი5-ზე);}$$

$$2) \{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \bar{D}\}, \\ \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა2 ნახაზი5-ზე);

$$3) \{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\}, \\ \{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\}, \\ \{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა3 ნახაზი5-ზე);

$$4) \{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა4 ნახაზი5-ზე);

$$5) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \\ \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა5 ნახაზი5-ზე);

- 6) $\{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი5-ზე);
- 7) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი5-ზე);
- 8) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი5-ზე);
- 9) $\{Z_7, Z_6, Z_4\}$ (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი5-ზე);
- 10) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა10 ნახაზი5-ზე);
- 11) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა11 ნახაზი5-ზე);
- 12) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა12 ნახაზი5-ზე).

დამტკიცება: მოცემული ლემის 1)-8) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 1.3.1-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.2-დან, ხოლო 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.5-დან.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.3.3. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$, მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა XI -ქვენახევარმესერი:

- 1) $\{\bar{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\}$ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი5-ზე);
- 2) $\{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა2 ნახაზი5-ზე);
- 3) $\{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა3 ნახაზი5-ზე);
- 4) $\{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$
 (იხ. დიაგრამა4 ნახაზი5-ზე);

$$5) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \\ \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა5 ნახაზი5-ზე);

$$6) \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი5-ზე);}$$

$$7) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი5-ზე);}$$

$$8) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი5-ზე);}$$

$$9) \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\} \text{ (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი5-ზე);}$$

$$10) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა10 ნახაზი5-ზე);

$$11) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა11 ნახაზი5-ზე);}$$

$$12) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა12 ნახაზი5-ზე);}$$

$$13) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\} \text{ (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი5-ზე);}$$

$$14) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა14 ნახაზი5-ზე);}$$

$$15) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა15 ნახაზი5-ზე).}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის 1)-8) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 1.3.1-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.2-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.5-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.4-დან, ხოლო 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.7-დან.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.3.4 ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა XI – ქვენახევარმესერი:

$$1) \{\bar{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\} \text{ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი5-ზე);}$$

$$2) \{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \bar{D}\}, \\ \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა2 ნახაზი5-ზე);

$$3) \{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\}, \\ \{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\}, \\ \{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა3 ნახაზი5-ზე);

$$4) \{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა4 ნახაზი5-ზე);

$$5) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \\ \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა5 ნახაზი5-ზე);

$$6) \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი5-ზე);}$$

$$7) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი5-ზე);}$$

$$8) \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი5-ზე);}$$

$$9) \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\} \text{ (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი5-ზე);}$$

$$10) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}$$

(იხ. დიაგრამა10 ნახაზი5-ზე);

$$11) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა11 ნახაზი5-ზე);}$$

$$12) \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა12 ნახაზი5-ზე);}$$

$$13) \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\} \text{ (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი5-ზე);}$$

$$14) \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა14 ნახაზი5-ზე);}$$

$$15) \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \text{ (იხ. დიაგრამა15 ნახაზი5-ზე).}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის 1)-8) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 1.3.1-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.2-დან,

12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.5-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.4-დან, ხოლო 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.3.7-დან.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.3.5. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$, მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა XI – ქვენახევარმესერი:

1) $\{\bar{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\}$ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი5-ზე);

2) $\{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა2 ნახაზი5-ზე);

$\{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\},$

3) $\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა3 ნახაზი5-ზე);

4) $\{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა4 ნახაზი5-ზე);

5) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\},$
 $\{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა5 ნახაზი5-ზე);

6) $\{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი5-ზე);

7) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი5-ზე);

8) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი5-ზე);

9) $\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}$ (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი5-ზე);

10) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა10 ნახაზი5-ზე);

11) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა11 ნახაზი5-ზე);

12) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა12 ნახაზი5-ზე);

13) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$ (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი5-ზე);

14) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა14 ნახაზი5-ზე);

15) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა15 ნახაზი5-ზე).

დამტკიცება: მოცემული ლემის 1)-15) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 1.3.3-დან და ლემა 1.3.4-დან.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.3.6. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$, მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა XI – ქვენახევარმესერი:

1) $\{\bar{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\}$ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი5-ზე);

2) $\{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \{Z_6, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა2 ნახაზი5-ზე);

3) $\{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\},$
 $\{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა3 ნახაზი5-ზე);

4) $\{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა4 ნახაზი5-ზე);

5) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\},$
 $\{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$

(იხ. დიაგრამა5 ნახაზი5-ზე);

- 6) $\{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი5-ზე);
- 7) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი5-ზე);
- 8) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი5-ზე);
- 9) $\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა9 ნახაზი5-ზე);
- 10) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}$
(იხ. დიაგრამა10 ნახაზი5-ზე);
- 11) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა11 ნახაზი5-ზე);
- 12) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა12 ნახაზი5-ზე);
- 13) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\},$
 $\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი5-ზე);
- 14) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა14 ნახაზი5-ზე);
- 15) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა15 ნახაზი5-ზე);
- 16) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ (იხ. დიაგრამა16 ნახაზი5-ზე).

დამტკიცება: მოცემული ლემის 1)-15) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 1.3.5-დან.

ახლა ვაჩვენოთ 16) პირობის სამართლიანობა. მართლაც, ვთქვათ $t \in \bar{D}$, $D_t = \{Z \in D \mid t \in Z\}$ და $\wedge(D, D_t)$ არის D_t სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვრი D -ში, მაშინ

(1.3) ფორმალური ტოლობებიდან გვექნება:

$$D_t = \begin{cases} D, & \text{if } t \in P_0, \\ \{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_1, \\ \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_2, \\ \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_3, \\ \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_4, \\ \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_5, \\ \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_6, \\ \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, & \text{if } t \in P_7, \end{cases} \quad \wedge(D, D_t) = \begin{cases} Z_5, & \text{if } t \in P_1, \\ Z_3, & \text{if } t \in P_2, \\ Z_7, & \text{if } t \in P_3, \\ Z_6, & \text{if } t \in P_5. \end{cases}$$

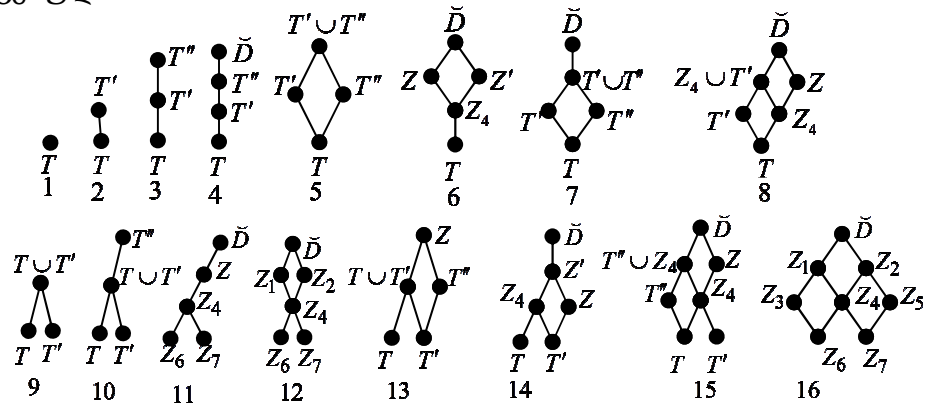
მივიღეთ, რომ $D^\wedge = \{\wedge(D, D_t) | t \in \check{D}\} = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}$ და $\wedge(D', D'_t) \notin D'$, თუ $t \in P_0 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7$. ამიტომ განმარტება 1.2.1-დან გამომდინარეობს, რომ D ნახევარმესერი არ წარმოადგენს XI -ნახევარმესერს.

თუ $P_0 = P_4 = P_6 = P_7 = \emptyset$, რადგანაც ისინი არიან სისავსის წყაროები, მაშინ $\wedge(D, D_t) \in D$ ყოველი $t \in \check{D}$ და $Z_4 = Z_7 \cup Z_6$, $Z_1 = Z_7 \cup Z_3$, $Z_2 = Z_6 \cup Z_5$ (იხ. 1.1 ტოლობები). ბოლო პირობებიდან და განმარტება 1.2.1-დან გამომდინარეობს, რომ D არის XI -ნახევარმესერი. $P_0 = P_4 = P_6 = P_7 = \emptyset$ ტოლობებიდან გვექნება:

$$\begin{aligned} Z_5 \cap Z_3 &= (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7) \cap (P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7) = \\ &= P_0 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7 = \emptyset. \end{aligned}$$

მეორეს მხრივ, თუ $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$, მაშინ ფორმალური ტოლობებიდან გვექნება, რომ $P_0 = P_4 = P_6 = P_7 = \emptyset$, ე.ი., D არის XI -ნახევარმესერი.

ლემა დამტკიცებულია.



ნახაზი 5.

D ნახევარმესერის XI -ქვენახევარმესერთა დიაგრამები.

თავი II

იდემპოტენტური ელემენტები

ამ თავში მოცემულია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტების სრული აღწერა. მაგრამ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტების აღწერას ჩვენ მოვახდენთ მოცემული ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეულების აღწერით, რადგანაც ცნობილია ასეთი თეორემა, რომ $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მოცემული ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული, როცა α იდემპოტენტია და $D = V(D, \alpha)$ (იხ. [68], თეორემა 4.1.3). აგრეთვე, როცა X არის სასრული სიმრავლე, გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დათვლილია მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობა.

2.1. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტების აღწერა

მოცემულ პარაგრაფში გამოყვანილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების მარჯვენა ერთეულების დათვლის ფორმულები. მანამდე კი განვიხილოთ რამდენიმე განმარტება, ლემა და თეორემა.

განმარტება 2.1.1. ვთქვათ $\varepsilon \in B_X(D)$. თუ $\alpha \circ \varepsilon = \alpha$ ნებისმიერი $\alpha \in B_X(D)$, მაშინ ε ეწოდება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული.

განმარტება 2.1.2. ვთქვათ $\varepsilon \in B_X(D)$. თუ $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$, მაშინ ε ეწოდება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი.

განმარტება 2.1.3. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერია, $\alpha \in B_X(D)$ და $Y_T^\alpha = \{x \in X \mid x\alpha = T\}$. თუ

$$V[\alpha] = \begin{cases} V(X^*, \alpha), & \text{თუ } \emptyset \notin D, \\ V(X^*, \alpha), & \text{თუ } \emptyset \in V(X^*, \alpha), \\ V(X^*, \alpha) \cup \{\emptyset\}, & \text{თუ } \emptyset \notin V(X^*, \alpha) \text{ და } \emptyset \in D, \end{cases}$$

მაშინ ცხადია, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი α ბინარული მიმართება შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმით

$$\alpha = \bigcup_{T \in V[\alpha]} (Y_T^\alpha \times T)$$

შემდგომში α ბინარული მიმართების ასეთი სახით წარმოდგენას კვაზინორმალურს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენის დროს არაა სავალდებულო ნებისმიერი $T \in V[\alpha]$ –სათვის Y_T^α განსხვავებული იყოს ცარიელი სიმრავლისაგან. მაგრამ ასეთი წარმოდგენისას ყოველთვის სრულდება პირობები:

- a) $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha = \emptyset$, ნებისმიერი $T, T' \in D$ და $T \neq T'$;
- b) $X = \bigcup_{T \in V[\alpha]} Y_T^\alpha$ (იხ. [68] განმარტება 1.11.1).

განმარტება 2.1.4. ვიტყვი, რომ არაცარიელ T სიმრავლეს ეწოდება D' სიმრავლის არაზღვარიტი ელემენტი, თუ $T \setminus I(D', T) \neq \emptyset$ (იხ. [68] განმარტება 1.13.1).

განმარტება 2.1.5. ვიტყვი, რომ არაცარიელ T სიმრავლეს ეწოდება D' სიმრავლის ზღვარიტი ელემენტი, თუ $T \setminus I(D', T) = \emptyset$ (იხ. [68] განმარტება 1.13.2).

ლემა 2.1.1. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერია. თუ ε ბინარული მიმართება წარმოდგენილი შემდეგი სახით $\varepsilon = \bigcup_{t \in \bar{D}} (\{t\} \times \wedge(D, D_t)) \cup ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული, მაშინ ε არის მოცემული ნახევარჯგუფის უდიდესი მარჯვენა ერთეული (იხ. [68], ლემა 12.1.2).

თეორემა 2.1.1. ვთქვათ $D_j = \{T_1, T_2, \dots, T_j\}$, X და Y – ისეთი სიმრავლეებია, რომ $\emptyset \neq Y \subseteq X$. თუ f არის ისეთი ასახვა X სიმრავლისა D_j სიმრავლეში, რომ $f(y) = T_j$ რომელიმე $y \in Y$, მაშინ ასეთი f ასახვათა რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით $s = j^{|X \setminus Y|} \cdot (j^{|Y|} - (j-1)^{|Y|})$ (იხ. [68], თეორემა 1.18.2).

ლემა 2.1.2. ვთქვათ $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ და $D_j = \{T_1, \dots, T_j\}$ რაღაც სიმრავლეებია, სადაც $k \geq 1$ და $j \geq 1$. მაშინ Y სიმრავლის ყველა შესაძლო ასახვათა რაოდენობა $s(k, j)$, D_j

სიმრავლის ისეთ D'_j ქვესიმრავლეზე, რომ $T_j \in D'_j$, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით $s(k, j) = j^k - (j-1)^k$ (იხ. ([68], შედეგი 1.18.1).

თეორემა 2.1.2. $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მოცემული ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული, როცა α იდემპოტენცია და $D = V(D, \alpha)$ (იხ. [68], თეორემა 4.1.3).

თეორემა 2.1.3. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერია. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ შეიცავს მარჯვენა ერთეულს, როცა D არის XI -ნახევარმესერი (იხ. [68], თეორემა 6.1.3).

თეორემა 2.1.4. ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა და $D(\alpha)$ არის $Q = V(D, \alpha) \setminus \{\emptyset\}$ ნახევარმესერის ისეთი T ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც \check{Q}_T სიმრავლის არაზღვართი ელემენტებია. α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{T \in D(\alpha)} (Y_T^\alpha \times T)$, არის მოცემული ნახევარჯგუფის

იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

a) $V(D, \alpha)$ არის გაერთიანებათა სრული XI -ნახევარმესერი;

b) $\bigcup_{T \in D(\alpha)} Y_T^\alpha \supseteq T$ ნებისმიერი $T \in D(\alpha)$;

c) $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$ ნებისმიერი არაზღვართი T ელემენტისათვის $\check{D}(\alpha)_T$ სიმრავლიდან (იხ. [68], თეორემა 6.3.9).

თეორემა 2.1.5. ვთქვათ D , $\Sigma(D)$, $E_X^{(r)}(D')$ და I სიმრავლეები შესაბამისად არიან გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერი, მოცემული D ნახევარმესერის ყველა XI -ქვენახევარმესერების სიმრავლე, $B_X(D')$ ($D' \in \Sigma(D)$) ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე და $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე. მაშინ შემდეგი პირობები არის სამართლიანი:

b) თუ $\emptyset \notin D$, მაშინ

1) $E_X^{(r)}(D) \cap E_X^{(r)}(D') = \emptyset$ ნებისმიერი $D' \neq D$ ელემენტებისათვის $\Sigma(D)$ სიმრავლიდან;

$$2) I = \bigcup_{D' \in \Sigma(D)} E_X^{(r)}(D');$$

3) თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I| = \sum_{D \in \Sigma(D)} |E_X^{(r)}(D)|$ (იხ. [68], პირობა b) თეორემა

6.2.3-დან).

თეორემა 2.1.6. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 1$) არის D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_m$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის მოცემული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha \supseteq T_p$ და $Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset$ ნებისმიერი $p = 0, 1, \dots, m-1$ და $q = 1, 2, \dots, m$ -თვის (იხ. [68] შედეგი 13.1.1).

თეორემა 2.1.7. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T_3$ და $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=1}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის მოცემული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y_1^\alpha \supseteq T_1$, $Y_2^\alpha \supseteq T_2$, $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha \supseteq T_k$ და $Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset$, სადაც $k = 4, 5, \dots, m-1$ და $q = 4, 5, \dots, m$ (იხ. [68], შედეგი 13.2.1).

თეორემა 2.1.8. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის ნახევარმესერი და j ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, რომ $0 \leq j \leq m-3$ და

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \quad T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}.$$

მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახე-

ვარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_j^\alpha \supseteq T_{j+1} \cap T_{j+2}, \quad Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha \supseteq T_{j+2},$$

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha \supseteq T_p, \quad Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset$$

ნებისმიერი $p = 0, 1, 2, \dots, m-1$, $q = 1, 2, \dots, m$ -თვის, ($p \neq j+2$, $q \neq j+3$) (იხ. [68] შედეგი 13.3.1).

თეორემა 2.1.9. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 5$) არის D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_1 \cap T_4 = \emptyset$ და

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, \quad T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \quad T_3 \setminus T_4 \neq \emptyset, \quad T_4 \setminus T_3 \neq \emptyset, \quad T_1 \cup T_2 = T_3, \quad T_3 \cup T_4 = T_5.$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ

წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=1}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის მოცემული

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$Y_1^\alpha \supseteq T_1$, $Y_2^\alpha \supseteq T_2$, $Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq T_4$, $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha \supseteq T_k$, $Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset$ ნებისმიერი $k = 5, 6, \dots, m-1$ და $q = 4, 6, \dots, m$ -თვის (იხ. [68], შედეგი 13.4.1).

თეორემა 2.1.10. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 6$) არის D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ და

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \quad T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, \quad T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \quad T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, \quad T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset, \quad T_1 \cup T_2 = T_3, \quad T_4 \cup T_5 = T_6$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ

წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=1}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის მოცემული

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_1^\alpha \supseteq T_1, \quad Y_2^\alpha \supseteq T_2, \quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq T_4, \quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq T_5,$$

$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha \supseteq T_p, \quad Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset$$

ნებისმიერი $p = 6, \dots, m-1$ და $q = 4, 5, 7, \dots, m$ -თვის (იხ. [68], შედეგი 13.5.1).

თეორემა 2.1.11. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული X –ნახევარმესერის Q ქვენახევარმესერი არის ბადე. მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} (Y_{ij}^\alpha \times T_{ij})$ და სრულდება პირობა $Q=V(D,\alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{aligned} Y_{00}^\alpha \supseteq T_{0k} \cap T_{s0}, Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \supseteq T_{01}, Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \cup Y_{02}^\alpha \supseteq T_{02}, \dots \\ \dots, Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \cup Y_{02}^\alpha \cup \dots \cup Y_{0k}^\alpha \supseteq T_{0k}, Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \supseteq T_{10}, \\ Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \cup Y_{20}^\alpha \supseteq T_{20}, \dots, Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \cup Y_{20}^\alpha \cup \dots \cup Y_{s0}^\alpha \supseteq T_{s0}, Y_{ij}^\alpha \cap T_{ij} \neq \emptyset \end{aligned}$$

ნებისმიერი $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\emptyset\}$ -თვის (იხ. [68], თეორემა 13.7.2).

თეორემა 2.1.12. ვთქვათ Q_1 არის ნახევარმესერი, რომლის დიაგრამას აქვს მე-4 ნახაზზე მოცემული სახე. მაშინ $B_X(Q_1)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q_1 \setminus \{T_0\}} (Y_{ij}^\alpha \times T_{ij}) \cup (Y_0^\alpha \times T_0)$ და სრულდება პირობა $Q_1=V(D,\alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{aligned} Y_0^\alpha \supseteq T_0, Y_{00}^\alpha \supseteq T_{00}, Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \supseteq T_{01}, Y_0^\alpha \cup Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \cup \dots \cup Y_{i0}^\alpha \supseteq T_{i0}, \\ Y_{01}^\alpha \cap T_{01} \neq \emptyset, Y_{i0}^\alpha \cap T_{i0} \neq \emptyset \end{aligned}$$

ნებისმიერი $i = 2, 3, \dots, s$ -თვის (იხ. [68], თეორემა 13.10.2).

თეორემა 2.1.13. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 1$) არის ისეთი D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_m$. თუ $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარმესერის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე, მაშინ

$$|E_X^{(r)}(Q)| = (2^{|T_1 \setminus T_0|} - 1) \cdot (3^{|T_2 \setminus T_1|} - 2^{|T_2 \setminus T_1|}) \cdot \dots \cdot ((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|}) \cdot (m+1)^{|X \setminus T_m|}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.1.5).

თეორემა 2.1.14. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის ისეთი D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერი, რომ $T_1, T_2 \neq \{\emptyset\}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T_3$ და $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$. თუ $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარმესერის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე, მაშინ

$$|E_X^{(r)}(Q)| = \left(4^{|T_4 \setminus T_3|} - 3^{|T_4 \setminus T_3|}\right) \cdots \left(m^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - (m-1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot m^{|X \setminus T_m|}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.2.3).

თეორემა 2.1.15. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერი და j არის ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი, რომ $0 \leq j \leq m-3$ და

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \quad T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}.$$

თუ $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარმესერის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე, მაშინ შემდეგი პირობები არის სამართლიანი:

a) $|E_X^{(r)}(Q)| = \left(2^{|T_1 \setminus T_2|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T_2 \setminus T_1|} - 1\right) \cdot \left(5^{|T_4 \setminus T_3|} - 4^{|T_4 \setminus T_3|}\right) \cdots \left((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus T_m|},$

თუ $j=0$ (ე.ი. $T_j = T_0$);

b) $|E_X^{(r)}(Q)| = \left(2^{|T_1 \setminus T_0|} - 1\right) \cdots \left((j+1)^{|\bar{T}_j \setminus \bar{T}_{j-1}|} - j^{|\bar{T}_j \setminus \bar{T}_{j-1}|}\right) \cdot (j+1)^{|(T_{j+1} \cap T_{j+2}) \setminus T_j|} \cdot \left((j+2)^{|T_{j+1} \setminus T_{j+2}|} - (j+1)^{|T_{j+1} \setminus T_{j+2}|}\right) \cdot \left((j+2)^{|T_{j+2} \setminus T_{j+1}|} - (j+1)^{|T_{j+2} \setminus T_{j+1}|}\right) \cdot \left((j+5)^{|T_{j+4} \setminus T_{j+3}|} - (j+4)^{|T_{j+4} \setminus T_{j+3}|}\right) \cdots \left((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus T_m|},$

თუ $1 \leq j \leq m-3$ ($T_j \neq T_0$) (იხ. [68], შედეგი 13.3.3).

თეორემა 2.1.16. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 5$) არის ისეთი D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერი, რომ $T_1 \cap T_4 = \emptyset$ და

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \\ T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, \quad T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \quad T_3 \setminus T_4 \neq \emptyset, \quad T_4 \setminus T_3 \neq \emptyset, \quad T_1 \cup T_2 = T_3, \quad T_3 \cup T_4 = T_5.$$

თუ $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარმესერის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე, მაშინ

$$|E_X^{(r)}(Q)| = \left(2^{|T_4 \setminus T_3|} - 1\right) \cdot \left(6^{|T_6 \setminus T_5|} - 5^{|T_6 \setminus T_5|}\right) \cdots \left(m^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - (m-1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot m^{|X \setminus T_m|}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.4.3).

თეორემა 2.1.17. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 6$) არის ისეთი D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერი, რომ $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ და

$$\begin{aligned}
& T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \quad T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \\
& T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, \\
& T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, \quad T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \quad T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, \quad T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset, \quad T_1 \cup T_2 = T_3, \quad T_4 \cup T_5 = T_6.
\end{aligned}$$

თუ $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარმესერის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე, მაშინ

$$\begin{aligned}
|E_X^{(r)}(Q)| &= 3^{(T_4 \cap T_5) \setminus T_3} \cdot (4^{|T_4 \setminus T_5|} - 3^{|T_4 \setminus T_5|}) \cdot (4^{|T_5 \setminus T_4|} - 3^{|T_5 \setminus T_4|}) \cdot (7^{|T_7 \setminus T_6|} - 6^{|T_7 \setminus T_6|}) \\
&\dots \cdot (m^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - (m-1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|}) \cdot m^{|X \setminus T_m|}
\end{aligned}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.5.3).

თეორემა 2.1.18. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერის Q ქვენახევარმესერი არის ზადე. თუ $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარმესერის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე, მაშინ

$$\begin{aligned}
|E_X^{(r)}(Q)| &= (2^{|T_{10} \setminus T_{0k}|} - 1) \cdot (3^{|T_{20} \setminus T_{1k}|} - 2^{|T_{20} \setminus T_{1k}|}) \dots (s^{|T_{s-10} \setminus T_{s-2k}|} - (s-1)^{|T_{s-10} \setminus T_{s-2k}|}) \\
&\cdot ((s+1)^{|T_{s0} \setminus T_{s-1k}|} - s^{|T_{s0} \setminus T_{s-1k}|}) \cdot (2^{|T_{01} \setminus T_{s0}|} - 1) \cdot (3^{|T_{02} \setminus T_{s1}|} - 2^{|T_{02} \setminus T_{s1}|}) \dots \\
&\cdot (k^{|T_{0k-1} \setminus T_{sk-2}|} - (k-1)^{|T_{0k-1} \setminus T_{sk-2}|}) \cdot ((k+1)^{|T_{0k} \setminus T_{sk-1}|} - k^{|T_{0k} \setminus T_{sk-1}|}) \cdot |D|^{|X \setminus T_{sk}|}.
\end{aligned}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.7.1).

თეორემა 2.1.19. ვთქვათ Q_1 არის ნახევარმესერი, რომლის დიაგრამას აქვს მე-4 ნახაზზე მოცემული სახე და $E_X^{(r)}(Q_1)$ არის $B_X(Q_1)$ ნახევარმესერის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე. თუ X არის სასრული სიმრავლე, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$\begin{aligned}
|E_X^{(r)}(Q_1)| &= (2^{|T_{01} \setminus T_{s0}|} - 1) \cdot (4^{|T_{20} \setminus T_{11}|} - 3^{|T_{20} \setminus T_{11}|}) \cdot (5^{|T_{30} \setminus T_{21}|} - 4^{|T_{30} \setminus T_{21}|}) \dots \\
&\cdot ((s+2)^{|T_{s0} \setminus T_{s-11}|} - (s+1)^{|T_{s0} \setminus T_{s-11}|}) \cdot |Q_1|^{|X \setminus T_{s1}|}.
\end{aligned}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.10.1). □

განმარტება 2.1.6. $\Sigma'_{XI}(X, D)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ გაერთიანებათა D ნახევარმესერის ყველა XI – ქვენახევარმესერების სიმრავლე.

ახლა ვთქვათ $D', D'' \in \Sigma'(X, D)$ და $\mathcal{G}_{XI} \subseteq \Sigma'_{XI}(X, D) \times \Sigma'_{XI}(X, D)$. ჩავთვალოთ, რომ $D' \mathcal{G}_{XI} D''$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს რომელიღაც სრული φ

იზომორფიზმი D' და D'' ნახევარმესერებს შორის. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ბინარული მიმართება θ_{XI} არის ექვივალენტობის მიმართება $\Sigma'_{XI}(X, D)$ სიმრავლეზე.

შემდგომში, $\mathcal{Q}_i \mathcal{P}_{XI}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $\Sigma'_{XI}(X, D)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული \mathcal{P}_{XI} ექვივალენტობის ის კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი \mathcal{Q}_i ($i=1, 2, 3, \dots, 16$) გაერთიანებათა X – ნახევარმესერის იზომორფულია.

ვთქვათ D' არის D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერი. $I(D')$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $B_X(D')$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე და

$$|I^*(\mathcal{Q}_i)| = \sum_{D' \in \mathcal{Q}_i \mathcal{P}_{XI}} |I(D')|$$

სადაც $i=1, 2, \dots, 16$.

ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$. \mathcal{Q}_i ($i=1, 2, 3, \dots, 16$) სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები:

- 1) $\mathcal{Q}_1 = \{T\}$, სადაც $T \in D$ (იხ. დიაგრამა1 ნახაზი 5-ზე);
- 2) $\mathcal{Q}_2 = \{T, T'\}$, სადაც $T, T' \in D$ და $T \subset T'$ (იხ. დიაგრამა2 ნახაზი 5-ზე);
- 3) $\mathcal{Q}_3 = \{T, T', T''\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$ და $T \subset T' \subset T''$ (იხ. დიაგრამა3 ნახაზი 5-ზე);
- 4) $\mathcal{Q}_4 = \{T, T', T'', \bar{D}\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$ და $T \subset T' \subset T'' \subset \bar{D}$ (იხ. დიაგრამა4 ნახაზი 5-ზე);
- 5) $\mathcal{Q}_5 = \{T, T', T'', T' \cup T''\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$ და $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$ (იხ. დიაგრამა5 ნახაზი 5-ზე);
- 6) $\mathcal{Q}_6 = \{T, Z_4, Z, Z', \bar{D}\}$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$ და $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$ (იხ. დიაგრამა6 ნახაზი 5-ზე);
- 7) $\mathcal{Q}_7 = \{T, T', T'', T' \cup T'', \bar{D}\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$ და $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$ (იხ. დიაგრამა7 ნახაზი 5-ზე);
- 8) $\mathcal{Q}_8 = \{T, T', Z_4, Z_4 \cup T', Z, \bar{D}\}$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T', Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$ და $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$ (იხ. დიაგრამა8 ნახაზი 5-ზე);

9) $Q_9 = \{T, T', T \cup T'\}$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$ და $T \cap T' = \emptyset$

(იხ. დიაგრამა9 ნახაზი5-ზე);

10) $Q_{10} = \{T, T', T \cup T', T''\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $(T \cup T') \subset T''$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$ და $T \cap T' = \emptyset$

(იხ. დიაგრამა10 ნახაზი5-ზე);

11) $Q_{11} = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z, \check{D}\}$, სადაც $Z \in \{Z_2, Z_1\}$ და $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$ (იხ. დიაგრამა11 ნახაზი5-ზე);

12) $Q_{12} = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \check{D}\}$, სადაც $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$ (იხ. დიაგრამა12 ნახაზი5-ზე);

13) $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', T'', Z\}$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \emptyset$,

$T'' \setminus (T \cup T') \neq \emptyset$ და $T \cap T'' = \emptyset$ (იხ. დიაგრამა13 ნახაზი5-ზე);

14) $Q_{14} = \{T, T', Z_4, Z, Z', \check{D}\}$, სადაც $T, T', Z, Z' \in D$, $T, T' \in \{Z_7, Z_6\}$, $T \neq T'$, $Z_4 \subset Z' \subset \check{D}$,

$T' \subset Z \subset Z'$, $Z_4 \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus Z_4 \neq \emptyset$ და $T \cap Z = \emptyset$ (იხ. დიაგრამა14 ნახაზი5-ზე);

15) $Q_{15} = \{T', T, Z_4, T'', Z, T'' \cup Z_4, \check{D}\}$, სადაც $T, T' \in \{Z_7, Z_6\}$, $T \neq T'$, $T \subset T''$, $T'' \in \{Z_5, Z_3\}$,

$Z_4 \subset Z$, $(T'' \cup Z_4) \cup Z = \check{D}$, $T'' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T'' \neq \emptyset$, $(T'' \cup Z_4) \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (T'' \cup Z_4) \neq \emptyset$ და

$T' \cap T'' = \emptyset$ (იხ. დიაგრამა15 ნახაზი5-ზე);

16) $Q_{16} = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$, სადაც $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ (იხ. დიაგრამა16 ნახაზი5-ზე).

თეორემა 2.1.20. თუ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, მაშინ სამართლიანია

შემდეგი ფორმულები:

$$1) |E_X^{(r)}(Q_1)| = 1;$$

$$2) |E_X^{(r)}(Q_2)| = (2^{|T \setminus T'|} - 1) \cdot 2^{|X \setminus T'|};$$

$$3) |E_X^{(r)}(Q_3)| = (2^{|T \setminus T'|} - 1) \cdot (3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T'' \setminus T'|}) \cdot 3^{|X \setminus T'|};$$

$$4) |E_X^{(r)}(Q_4)| = (2^{|T \setminus T'|} - 1) \cdot (3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T'' \setminus T'|}) \cdot (4^{|\check{D} \setminus T''|} - 3^{|\check{D} \setminus T''|}) \cdot 4^{|X \setminus \check{D}|};$$

$$5) |E_X^{(r)}(Q_5)| = (2^{|T \setminus T''|} - 1) \cdot (2^{|T'' \setminus T'|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus (T' \cup T'')|};$$

$$6) |E_X^{(r)}(Q_6)| = (2^{|Z_4 \setminus T'|} - 1) \cdot 2^{|(Z \setminus Z') \setminus Z_4|} \cdot (3^{|Z \setminus Z'|} - 2^{|Z \setminus Z'|}) \cdot (3^{|Z' \setminus Z|} - 2^{|Z' \setminus Z|}) \cdot 5^{|X \setminus \check{D}|};$$

$$7) |E_X^{(r)}(Q_7)| = (2^{|T \setminus T''|} - 1) \cdot (2^{|T'' \setminus T'|} - 1) \cdot (5^{|\check{D} \setminus (T' \cup T'')|} - 4^{|\check{D} \setminus (T' \cup T'')|}) \cdot 5^{|X \setminus \check{D}|};$$

$$8) |E_X^{(r)}(Q_8)| = (2^{|T \setminus Z|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus T|} - 1) \cdot (3^{|Z \setminus (Z_4 \cup T)|} - 2^{|Z \setminus (Z_4 \cup T)|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$9) |E_X^{(r)}(Q_9)| = 3^{|X \setminus (T \cup T')|};$$

$$10) |E_X^{(r)}(Q_{10})| = (4^{|T'' \setminus (T \cup T')|} - 3^{|T'' \setminus (T \cup T')|}) \cdot 4^{|X \setminus T'|};$$

$$11) |E_X^{(r)}(Q_{11})| = (4^{|Z \setminus Z_4|} - 3^{|Z \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|D \setminus Z|} - 4^{|D \setminus Z|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$12) |E_X^{(r)}(Q_{12})| = 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$13) |E_X^{(r)}(Q_{13})| = (2^{|T'' \setminus (T' \cup T)|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z|};$$

$$14) |E_X^{(r)}(Q_{14})| = (2^{|Z \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|D \setminus Z|} - 5^{|D \setminus Z|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$15) |E_X^{(r)}(Q_{15})| = (2^{|T'' \setminus Z|} - 1) \cdot (4^{|Z \setminus (T'' \cup Z_4)|} - 3^{|Z \setminus (T'' \cup Z_4)|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$16) |E_X^{(r)}(Q_{16})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|}.$$

დამტკიცება: 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.13-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.15-დან, 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.18-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.14-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.17-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.16-დან, ხოლო 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.19-დან.

ახლა ვაჩვენოთ 16) პირობის სამართლიანობა. მანამ განვიხილოთ შემდეგი ლემები.

ლემა 2.1.3. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$. თუ $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$P_3 = Z_7, P_5 = Z_6, P_2 = Z_3 \setminus Z_2, P_1 = Z_5 \setminus Z_1$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს მოცემული D ნახევარმესერის (1.3) ფორმალური ტოლობებიდან.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.1.4. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$. თუ $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$, მაშინ

$$\varepsilon = (Z_7 \times Z_7) \cup (Z_6 \times Z_6) \cup ((Z_5 \setminus Z_1) \times Z_5) \cup ((Z_3 \setminus Z_2) \times Z_3) \cup ((X \setminus \check{D}) \times \check{D})$$

ბინარული მიმართება არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის უდიდესი მარჯვენა ერთეული.

დამტკიცება: დაშვების თანახმად და ლემა 1.3.6-ის თანახმად მოცემული D ნახევარმესერი არის XI – ნახევარმესერი. გამომდენარე აქედან და ლემა 2.1.1, ლემა 2.1.3 და თეორემა 2.1.3-დან მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \bigcup_{t \in \check{D}} (\{t\} \times \wedge(D, D_t)) \cup ((X \setminus \check{D}) \times \check{D}) = (P_3 \times Z_7) \cup (P_5 \times Z_6) \cup (P_1 \times Z_5) \cup \\ &\cup (P_2 \times Z_3) \cup ((X \setminus \check{D}) \times \check{D}) = (Z_7 \times Z_7) \cup (Z_6 \times Z_6) \cup ((Z_5 \setminus Z_1) \times Z_5) \cup \\ &\cup ((Z_3 \setminus Z_2) \times Z_3) \cup ((X \setminus \check{D}) \times \check{D}) \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.1.5. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$ არის XI – ნახევარმესერი. მაშინ α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_0^\alpha \times \check{D}) \cup \bigcup_{i=1}^7 (Y_i^\alpha \times Z_i)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \neq \{\emptyset\}$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} Y_7^\alpha \supseteq Z_7, Y_6^\alpha \supseteq Z_6, Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5, Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \\ Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $D(\alpha) = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$, ცხადია რომ $D(\alpha)$ არის D ნახევარმესერის წარმომქმნელთა სისტემა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} \check{D}(\alpha)_{Z_7} &= \{Z_7\}, \check{D}(\alpha)_{Z_6} = \{Z_6\}, \check{D}(\alpha)_{Z_5} = \{Z_7, Z_5\}, \check{D}(\alpha)_{Z_4} = \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \\ \check{D}(\alpha)_{Z_3} &= \{Z_6, Z_3\}, \check{D}(\alpha)_{Z_2} = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \check{D}(\alpha)_{Z_1} = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}. \end{aligned}$$

2.1.4 თეორემის b) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} Y_7^\alpha \supseteq Z_7, Y_6^\alpha \supseteq Z_6, Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \\ Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1; \\ Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 \cup Y_4^\alpha = Z_4 \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha &= (Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha) \cup (Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha) \cup Y_2^\alpha \supseteq \\
&\supseteq Z_5 \cup Z_4 \cup Y_2^\alpha = Z_2 \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2, \\
Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha &= (Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha) \cup (Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha) \cup Y_1^\alpha \supseteq \\
&\supseteq Z_4 \cup Z_3 \cup Y_1^\alpha = Z_1 \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1,
\end{aligned}$$

ე.ი., შემდეგი ჩართვები

$$Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$$

არის ყოველთვის სამართლიანი. აგრეთვე ადვილად შემოწმდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა

$$\begin{aligned}
l(\ddot{D}_{Z_7}, Z_7) &= \cup(\ddot{D}_{Z_7} \setminus \{Z_7\}) = \emptyset, Z_7 \setminus l(\ddot{D}_{Z_7}, Z_7) = Z_7 \setminus \emptyset \neq \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_6}, Z_6) &= \cup(\ddot{D}_{Z_6} \setminus \{Z_6\}) = \emptyset, Z_6 \setminus l(\ddot{D}_{Z_6}, Z_6) = Z_6 \setminus \emptyset \neq \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_5}, Z_5) &= \cup(\ddot{D}_{Z_5} \setminus \{Z_5\}) = Z_7, Z_5 \setminus l(\ddot{D}_{Z_5}, Z_5) = Z_5 \setminus Z_7 \neq \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_3}, Z_3) &= \cup(\ddot{D}_{Z_3} \setminus \{Z_3\}) = Z_6, Z_3 \setminus l(\ddot{D}_{Z_3}, Z_3) = Z_3 \setminus Z_6 \neq \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_4}, Z_4) &= \cup(\ddot{D}_{Z_4} \setminus \{Z_4\}) = Z_4, Z_4 \setminus l(\ddot{D}_{Z_4}, Z_4) = Z_4 \setminus Z_4 = \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_2}, Z_2) &= \cup(\ddot{D}_{Z_2} \setminus \{Z_2\}) = Z_2, Z_2 \setminus l(\ddot{D}_{Z_2}, Z_2) = Z_2 \setminus Z_2 = \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_1}, Z_1) &= \cup(\ddot{D}_{Z_1} \setminus \{Z_1\}) = Z_1, Z_1 \setminus l(\ddot{D}_{Z_1}, Z_1) = Z_1 \setminus Z_1 = \emptyset.
\end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ Z_7, Z_6, Z_5, Z_3 არაზღვართი ელემენტებია შესაბამისად $\ddot{D}(\alpha)_{Z_7}, \ddot{D}(\alpha)_{Z_6}, \ddot{D}(\alpha)_{Z_5}$ და $\ddot{D}(\alpha)_{Z_3}$ სიმრავლეებზე. ახლა 2.1.4 თეორემის c) პირობის თანახმად კი მივიღებთ, რომ $Y_7^\alpha \cap Z_7 \neq \emptyset, Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$ და $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$. რადგანაც შემდეგი ჩართვები $Z_7 \subset Z_5, Z_6 \subset Z_3$ სამართლიანია, ამიტომ მივიღებთ $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$ და $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$.

გამომდინარე აქედან ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned}
Y_7^\alpha \supseteq Z_7, Y_6^\alpha \supseteq Z_6, Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5, Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \\
Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.1.6. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \ddot{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ და $E_X^{(r)}(D)$

სიმრავლე არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$|E_X^{(r)}(D)| = (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ $\alpha \in E_X^{(r)}(D)$ და α იდემპოტენტური ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე: $\alpha = (Y_0^\alpha \times \bar{D}) \cup \bigcup_{i=1}^7 (Y_i^\alpha \times Z_i)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\emptyset\}$ (ე.ი., $D = V(D, \alpha)$) (იხ. თეორემა 2.1.2) და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\begin{aligned} Y_7^\alpha \supseteq Z_7, Y_6^\alpha \supseteq Z_6, Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5, Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \\ Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (2.1.)$$

ვთქვათ f_α არის X სიმრავლის D ნახევარმესერში ისეთი ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $f_\alpha(t) = t\alpha$ ნებისმიერი $t \in X$ ელემენტისათვის, $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}$ სიმბოლოებით აღნიშნულია f_α ასახვის შეზღუდვები შესაბამისად $Z_7, Z_6, Z_3 \setminus Z_2, Z_5 \setminus Z_1, X \setminus \bar{D}$ სიმრავლეებზე. შევნიშნოთ, რომ $\{Z_7, Z_6, Z_3 \setminus Z_2, Z_5 \setminus Z_1, X \setminus \bar{D}\}$ სიმრავლის ელემენტები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება ტოლია X სიმრავლის, ე.ი. $Z_7 \cup Z_6 \cup (Z_3 \setminus Z_2) \cup (Z_5 \setminus Z_1) \cup (X \setminus \bar{D}) = X$.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}$ ასახვათა თვისებები.

1) $t \in Z_7$. მაშინ (2.1) ჩართვების თანახმად $t \in Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_7^\alpha$ და Y_7^α სიმრავლის განმარტების თანახმად $t\alpha = Z_7$. ამიტომ $f_{1\alpha}(t) = Z_7$ ყოველი $t \in Z_7$ -ელემენტისათვის.

2) $t \in Z_6$. მაშინ (2.1) ჩართვების თანახმად $t \in Z_6 \subseteq Y_6^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_6^\alpha$ და Y_6^α სიმრავლის განმარტების თანახმად $t\alpha = Z_6$. ამიტომ $f_{2\alpha}(t) = Z_6$ ყოველი $t \in Z_6$ -ელემენტისათვის.

3) $t \in Z_3 \setminus Z_2$. მაშინ (2.1) ჩართვების თანახმად $t \in Z_3 \setminus Z_2 \subseteq Z_3 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha$ და Y_6^α და Y_3^α სიმრავლეების განმარტების თანახმად $t\alpha \in \{Z_6, Z_3\}$. ამიტომ $f_{3\alpha}(t) \in \{Z_6, Z_3\}$ ყოველი $t \in Z_3 \setminus Z_2$ -ელემენტისათვის.

მეორეს მხრივ $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$, ამიტომაც $t_3\alpha = Z_3$ რომელიღაც $t_3 \in Z_3$ ელემენტისათვის. თუ $t_3 \in Z_2$, მაშინ $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად გვექნება $t_3 \in Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha$, ე.ი., $t\alpha \in \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t_3\alpha = Z_3$ ტოლობას, რადგანაც $Z_3 \notin \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$. ამრიგად,

$f_{3\alpha}(t_3) = Z_3$ რომელიღაც $t \in Z_3 \setminus Z_2$.

4) $t \in Z_5 \setminus Z_1$. მაშინ (2.1) ჩართვების თანახმად $t \in Z_5 \setminus Z_1 \subseteq Z_5 \subseteq Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha$ და Y_7^α და Y_5^α სიმრავლეების განმარტების თანახმად $t\alpha \in \{Z_7, Z_5\}$. ამიტომ $f_{4\alpha}(t) \in \{Z_7, Z_5\}$ ყოველი $t \in Z_5 \setminus Z_1$ -ელემენტისათვის.

მეორეს მხრივ $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$, ამიტომაც $t_5\alpha = Z_5$ რომელიღაც $t_5 \in Z_5$ ელემენტისათვის. თუ $t_5 \in Z_1$, მაშინ $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად გვექნება $t_5 \in Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$ ე.ი., $t\alpha \in \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t_5\alpha = Z_5$ ტოლობას, რადგანაც $Z_5 \notin \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$.

5) $t \in X \setminus \check{D}$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენიდან და (2.1.1) პირობებიდან გვექნება, რომ

$$t \in X \setminus \check{D} \subseteq X = Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_0^\alpha$$

$Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად გვექნება $t\alpha \in \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$. ამიტომ $f_{5\alpha}(t) \in \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$ ყოველი $t \in X \setminus \check{D}$.

ამრიგად, ყოველი $\alpha \in E_X^{(r)}(D)$ ბინარული მიმართებისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ დალაგებული სისტემა. ცხადია, რომ განსხვავებულ ბინარულ მიმართებებს ეთანადება $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ სახის განსხვავებული სისტემები.

ახლა ვთქვათ $f_1: Z_7 \rightarrow \{Z_7\}$, $f_2: Z_6 \rightarrow \{Z_6\}$, $f_3: Z_3 \setminus Z_2 \rightarrow \{Z_6, Z_3\}$, $f_4: Z_5 \setminus Z_1 \rightarrow \{Z_7, Z_5\}$, $f_5: X \setminus \check{D} \rightarrow D$ არიან ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

6) $f_1(t) \in \{Z_7\}$, ნებისმიერი $t \in Z_7$;

7) $f_2(t) \in \{Z_6\}$, ნებისმიერი $t \in Z_6$;

8) $f_3(t) \in \{Z_6, Z_3\}$, ნებისმიერი $t \in Z_3 \setminus Z_2$ და $f_3(t_3) = Z_3$ რომელიღაც $t_3 \in Z_3 \setminus Z_2$;

9) $f_4(t) \in \{Z_7, Z_5\}$, ნებისმიერი $t \in Z_5 \setminus Z_1$ და $f_4(t_4) = Z_5$ რომელიღაც $t_4 \in Z_5 \setminus Z_1$;

10) $f_5(t) \in \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus \check{D}$.

ახლა განვმარტოთ $f : X \rightarrow D$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in Z_7, \\ f_2(t), & t \in Z_6, \\ f_3(t), & t \in Z_3 \setminus Z_2, \\ f_4(t), & t \in Z_5 \setminus Z_1, \\ f_5(t), & t \in X \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

და f ასახვას შევუსაბამოთ ბინარული $\beta = \bigcup_{t \in X} (\{t\} \times f(t))$ მიმართება. ვთქვათ

$Y_0^\beta = \{t \mid t\beta = \bar{D}\}$ და $Y_i^\beta = \{t \mid t\beta = Z_i\}$ ($i=1, 2, 3, \dots, 7$). მაშინ β ბინარული მიმართება შეიძლება

წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\beta = (Y_7^\beta \times Z_7) \cup (Y_6^\beta \times Z_6) \cup (Y_5^\beta \times Z_5) \cup (Y_4^\beta \times Z_4) \cup (Y_3^\beta \times Z_3) \cup (Y_2^\beta \times Z_2) \cup (Y_1^\beta \times Z_1) \cup (Y_0^\beta \times \bar{D})$$

და რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\begin{aligned} Y_7^\beta \supseteq Z_7, Y_6^\beta \supseteq Z_6, Y_7^\beta \cup Y_5^\beta \supseteq Z_5, Y_6^\beta \cup Y_3^\beta \supseteq Z_3, \\ Y_5^\beta \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_3^\beta \cap Z_3 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან და ლემა 2.1.5-დან მივიღებთ, რომ β ბინარული მიმართება იქნება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული, ე. ი. $\beta \in E_X^{(r)}(D)$.

ამრიგად, მივიღეთ რომ ყველა $\alpha \in E_X^{(r)}(D)$ ბინარულ მიმართებებსა და ასახვათა $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ სისტემებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა.

თეორემა 2.1.1-დან გამომდინარე $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}$ ასახვათა რაოდენობა შესაბამისად ტოლი იქნება:

$$1, 1, 2^{|Z_3 \setminus Z_2| - 1}, 2^{|Z_5 \setminus Z_1| - 1}, 8^{|X \setminus \bar{D}|}$$

(იხ. ლემა 2.1.2). ამ შემთხვევაში მოცემული $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ სახის დალაგებული

სისტემების რაოდენობა ან კიდევ $E_X^{(r)}(D)$ სიმრავლის სიმძლავრე $|E_X^{(r)}(D)|$

გამოითვლება ფორმულით:

$$|E_X^{(r)}(D)| = (2^{|Z_5 \setminus Z_1| - 1}) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2| - 1}) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|}$$

ლემა დამტკიცებულია. ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

**2.2. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების
იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$ და მათი
დათვლის ფორმულები**

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერების XI – ქვენახევარ-მესერების აღწერისას გამოიყო 6 შემთხვევა და თითოეული შემთხვევისთვის გამოიყო XI – ქვენახევარმესერები, ამიტომ აქაც თითოეული შემთხვევებისთვის ცალკ-ცალკე უნდა აღიწეროს იდემპოტენტური ელემენტები. მოცემულ პარაგრაფში კი განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

- 1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;
- 2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$;
- 3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;
- 4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \check{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$;
- 5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$,

$Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.1-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-8 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდეალპოტენტური ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.6-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.8-დან და 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.11-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_1)|$ -ის სიმძლავრე

$$|I^*(Q_1)| = 8.$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_1 \mathcal{G}_{XI} = \{\{Z_7\}, \{Z_6\}, \{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\bar{D}\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7\}, D'_2 = \{Z_6\}, D'_3 = \{Z_5\}, D'_4 = \{Z_4\}, D'_5 = \{Z_3\}, D'_6 = \{Z_2\}, D'_7 = \{Z_1\}, D'_8 = \{\bar{D}\},$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_1)| = \sum_{i=1}^8 |I(D'_i)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 1) პირობიდან ვღებულობთ, რომ

$$|I^*(Q_1)| = 1+1+1+1+1+1+1+1 = 8$$

ღემა დამტკიცებულია.

ღემა 2.2.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$|I^*(Q_2)|$ -ის სიმპლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\begin{aligned} |I^*(Q_2)| = & \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \bar{D}|} + \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \bar{D}|} + \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \bar{D}|} + \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \bar{D}|} + \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \bar{D}|} + \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \bar{D}|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \\ & + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \\ & + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \\ & + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned} Q_2 \theta_{XI} = & \{Z_1, \bar{D}\}, \{Z_2, \bar{D}\}, \{Z_3, \bar{D}\}, \{Z_4, \bar{D}\}, \{Z_5, \bar{D}\}, \{Z_6, \bar{D}\}, \{Z_7, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_1\}, \\ & \{Z_7, Z_1\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_5\}. \end{aligned}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 = & \{Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_2, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_3, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_4, \bar{D}\}, D'_5 = \{Z_5, \bar{D}\}, \\ D'_6 = & \{Z_6, \bar{D}\}, D'_7 = \{Z_7, \bar{D}\}, D'_8 = \{Z_3, Z_1\}, D'_9 = \{Z_4, Z_1\}, D'_{10} = \{Z_6, Z_1\}, \\ D'_{11} = & \{Z_7, Z_1\}, D'_{12} = \{Z_4, Z_2\}, D'_{13} = \{Z_5, Z_2\}, D'_{14} = \{Z_6, Z_2\}, D'_{15} = \{Z_7, Z_2\}, \\ D'_{16} = & \{Z_6, Z_3\}, D'_{17} = \{Z_6, Z_4\}, D'_{18} = \{Z_7, Z_4\}, D'_{19} = \{Z_7, Z_5\}. \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_2)| = \sum_{i=1}^{19} |I(D'_i)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 2) პირობიდან ვდებულობთ ლემა 2.2.2-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_3)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\begin{aligned}
 |I^*(Q_3)| = & (2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & + (2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & + (2^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_2 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & + (2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_3|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & + (2^{|Z_1 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_2 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & + (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_5|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_5|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & + (2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_3|}) \cdot 3^{|X \setminus Z_1|} + (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 3^{|X \setminus Z_1|} + \\
 & + (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 3^{|X \setminus Z_2|} + (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 3^{|X \setminus Z_1|} + \\
 & + (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 3^{|X \setminus Z_2|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_5|}) \cdot 3^{|X \setminus Z_2|}
 \end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned}
 Q_3 \theta_{XI} = & \left\{ \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \right. \\
 & \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \\
 & \left. \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_2\} \right\}.
 \end{aligned}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned}
 D'_1 = & \{Z_3, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \\
 D'_5 = & \{Z_6, Z_1, \bar{D}\}, D'_6 = \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, D'_7 = \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, D'_8 = \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \\
 D'_9 = & \{Z_7, Z_1, \bar{D}\}, D'_{10} = \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, D'_{11} = \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, D'_{12} = \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \\
 D'_{13} = & \{Z_6, Z_3, Z_1\}, D'_{14} = \{Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_{15} = \{Z_6, Z_4, Z_2\}, D'_{16} = \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \\
 D'_{17} = & \{Z_7, Z_4, Z_2\}, D'_{18} = \{Z_7, Z_5, Z_2\}.
 \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_3)| = \sum_{i=1}^{18} |I(D'_i)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 3) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.2.3-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_4)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\begin{aligned} |I^*(Q_4)| = & (2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_5|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + (2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_3|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned} Q_4 \theta_{XI} = & \{ \{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\} \\ & \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \} \end{aligned}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 = & \{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \\ D'_4 = & \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_5 = \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, D'_6 = \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_4)| = \sum_{i=1}^6 |I(D'_i)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 4) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.2.4-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_5)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\begin{aligned} |I^*(Q_5)| = & 3 \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \\ & + (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ & + (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned} Q_5 \theta_{XI} = & \{ \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \\ & \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\} \} \end{aligned}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 = & \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, \\ D'_5 = & \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, D'_6 = \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, D'_7 = \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\} \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_5)| = \sum_{i=1}^7 |I(D'_i)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 5) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.2.5-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2.6. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_6)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\begin{aligned} |I^*(Q_6)| = & (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot 2^{|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_4|} \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot 2^{|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_4|} \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_6 \theta_{XI} = \{ \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\},$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_6)| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 6) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.2.6-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2.7. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$|I^*(Q_7)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_7)| = (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ + (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_7 \theta_{XI} = \{ \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\},$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_7)| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 7) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.2.7-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2.8. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$|I^*(Q_8)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_8)| = (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_8 \theta_{XI} = \{ \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\},$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_8)| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 8) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.2.8-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$k_1 = \sum_{i=1}^8 |I^*(Q_i)|$$

თეორემა 2.2.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $|I_D| = k_1$.

დამტკიცება: ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.2.1-დან.

მაგალითი 2.2.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P_0 = \{1\}, P_1 = \{2\}, P_2 = \{3\}, P_3 = \{4\}, P_5 = \{5\}, P_4 = P_6 = P_7 = \emptyset,$$

მაშინ $\bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_1 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Z_2 = \{1, 2, 4, 5\}$, $Z_3 = \{1, 3, 5\}$, $Z_4 = \{1, 4, 5\}$, $Z_5 = \{1, 2, 4\}$, $Z_6 = \{1, 5\}$, $Z_7 = \{1, 4\}$ და

$$D = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

გამომდინარე აქედან სამართლიანია შემდეგი ტოლობა და უტოლობა:

$$Z_7 \cap Z_6 = \{1, 4\} \cap \{1, 5\} = \{1\} \neq \emptyset,$$

სადაც $|I^*(Q_1)| = 8$, $|I^*(Q_2)| = 73$, $|I^*(Q_3)| = 54$, $|I^*(Q_4)| = 6$, $|I^*(Q_5)| = 17$, $|I^*(Q_6)| = 2$, $|I^*(Q_7)| = 2$, $|I^*(Q_8)| = 2$, $|I_D| = 164$ (იხ. დამატება 2).

2.3. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$

და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \bar{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$,
 $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$,
 $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$,
 $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ
პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$;

10) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T)$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1, \bar{D}\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha \notin \{\emptyset\}$
და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$,
 $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$
და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.2-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-12 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-8) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.2.1-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.7-დან და 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.10-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_9)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_9)| = 3^{|X \setminus Z_4|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_9 \theta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_4\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_9)| = |I(D'_1)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 9) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.3.1-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{10})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{10})| = \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|D \setminus Z_4|} - 3^{|D \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{10} \theta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_3 = \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\},$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{10})| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)| + |I(D'_3)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 10) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.3.2-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{11})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{11})| = (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{11}\theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\},$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{11})| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 11) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.3.3-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{12})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{12})| = 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{12}\theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{12})| = |I(D'_1)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 12) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.3.4-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned}
k_2 &= |I^*(Q_9)| + |I^*(Q_{10})| + |I^*(Q_{11})| + |I^*(Q_{12})| = \\
&= 3^{|X \setminus Z_4|} + (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + (4^{|D \setminus Z_4|} - 3^{|D \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus D|} + \\
&+ (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|D \setminus Z_2|} - 4^{|D \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus D|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|D \setminus Z_1|} - 4^{|D \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus D|} + \\
&+ 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus D|}
\end{aligned}$$

თეორემა 2.3.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $|I_D| = k_1 + k_2$.

დამტკიცება: ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.3.1-დან.

მაგალითი 2.3.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_5 = \{4\}, P_6 = \{5\}, P_7 = \{6\}, P_0 = P_4 = \emptyset,$$

$$\text{მაშინ } \bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Z_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}, Z_2 = \{1, 3, 4, 5, 6\}, Z_3 = \{2, 4, 5, 6\}, Z_4 = \{3, 4, 5, 6\},$$

$$Z_5 = \{1, 3, 5, 6\}, Z_6 = \{4, 6\}, Z_7 = \{3, 5\} \text{ და}$$

$$D = \{\{3, 5\}, \{4, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

გამომდინარე აქედან სამართლიანია შემდეგი ტოლობები და უტოლობები:

$$Z_7 \cap Z_6 = \{3, 5\} \cap \{4, 6\} = \emptyset,$$

$$Z_7 \cap Z_3 = \{3, 5\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{5\} \neq \emptyset,$$

$$Z_6 \cap Z_5 = \{4, 6\} \cap \{1, 3, 5, 6\} = \{6\} \neq \emptyset,$$

$$\text{სადაც } |I^*(Q_1)| = 8, |I^*(Q_2)| = 153, |I^*(Q_3)| = 146, |I^*(Q_4)| = 18, |I^*(Q_5)| = 17, |I^*(Q_6)| = 2,$$

$$|I^*(Q_7)| = 6, |I^*(Q_8)| = 2, |I^*(Q_9)| = 9, |I^*(Q_{10})| = 15, |I^*(Q_{11})| = 2, |I^*(Q_{12})| = 1, |I_D| = 379 \text{ (იხ.}$$

დამატება 3).

2.4. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$

და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$ და $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 2.4.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \check{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$,
 $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$,
 $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$,
 $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$,
 $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$,
 $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$
და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$.

13) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და
აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$.

14) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$
და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$.

15) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha$,
 $Y_2^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.3-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-15 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-8) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.2.1-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.7-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.10-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.9-დან და 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.12-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.4.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_9)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_9)| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_9 \theta_{XI} = \{ \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\} \}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4\}$, $D'_2 = \{Z_7, Z_3, Z_1\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_9)| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 9) პირობიდან ვდებულობთ ლემა 2.4.1-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.4.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{10})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{10})| = \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|} \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|} \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|D \setminus Z_4|} - 3^{|D \setminus Z_4|} \right) \cdot 4^{|X \setminus D|} + \left(4^{|D \setminus Z_1|} - 3^{|D \setminus Z_1|} \right) \cdot 4^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{10}\theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_3 = \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{10})| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)| + |I(D'_3)| + |I(D'_4)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 10) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.4.2-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.4.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{13})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{13})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{13}\theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{13})| = |I(D'_1)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 13) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.4.3-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.4.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{14})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{14})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|D \setminus Z_1|} - 5^{|D \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{14}\theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{14})| = |I(D'_1)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 14) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.4.4-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.4.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{15})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{15})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{15} \theta_{XI} = \{ \{ Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D} \} \}$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{ Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D} \}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{15})| = |I(D'_1)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 15) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.4.5-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} k_3 = & |I^*(Q_9)| + |I^*(Q_{10})| + |I^*(Q_{11})| + |I^*(Q_{12})| + |I^*(Q_{13})| + |I^*(Q_{14})| + |I^*(Q_{15})| = \\ & = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|} + (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ & + (4^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|Z_1 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + 3^{(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_3 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

$(|I^*(Q_{11})|$ და $|I^*(Q_{12})|$) იხილით შესაბამისად ლემა 2.3.3-ში და ლემა 2.3.4-ში).

თეორემა 2.4.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $|I_D| = k_1 + k_3$.

დამტკიცება: ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.4.1-დან.

მაგალითი 2.4.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_4 = \{4\}, P_5 = \{5\}, P_0 = P_4 = P_6 = \emptyset,$$

მაშინ $\check{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_1 = \{2, 3, 4, 5\}$, $Z_2 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Z_3 = \{2, 4, 5\}$, $Z_4 = \{3, 4, 5\}$, $Z_5 = \{1, 3, 5\}$,

$Z_6 = \{4, 5\}$, $Z_7 = \{3\}$ და

$$D = \{\{3\}, \{4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

გამომდინარე აქედან სამართლიანია შემდეგი ტოლობები და უტოლობები:

$$Z_7 \cap Z_3 = \{3\} \cap \{2, 4, 5\} = \emptyset,$$

$$Z_6 \cap Z_5 = \{4, 5\} \cap \{1, 4, 5\} = \{4, 5\} \neq \emptyset,$$

სადაც $|I^*(Q_1)| = 8$, $|I^*(Q_2)| = 113$, $|I^*(Q_3)| = 100$, $|I^*(Q_4)| = 12$, $|I^*(Q_5)| = 17$, $|I^*(Q_6)| = 2$,
 $|I^*(Q_7)| = 4$, $|I^*(Q_8)| = 2$, $|I^*(Q_9)| = 12$, $|I^*(Q_{10})| = 16$, $|I^*(Q_{11})| = 2$, $|I^*(Q_{12})| = 1$, $|I^*(Q_{13})| = 5$,
 $|I^*(Q_{14})| = 1$, $|I^*(Q_{15})| = 1$, $|I_D| = 296$ (იხ. დამატება 4).

2.5. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$

და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$ და $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$.

მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 2.5.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირო-

ბეზს: $Y_T^\alpha \supseteq T, Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D, T \subset T' \subset T'', Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და

აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T', Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D, T \subset T' \subset T'' \subset \check{D}$,

$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$,

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T'', Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D, T \subset T', T \subset T''$,

$T' \setminus T'' \neq \emptyset, T'' \setminus T' \neq \emptyset, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$,

$Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T'', Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}, Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$,

$Z \neq Z', Z \setminus Z' \neq \emptyset, Z' \setminus Z \neq \emptyset, Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$,

$Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z', Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset, Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$,

$T \subset T', T \subset T'', T' \setminus T'' \neq \emptyset, T'' \setminus T' \neq \emptyset, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T', Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T'', Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$,

$T' \in \{Z_5, Z_3\}, T \subset T', Z_4 \cup T', Z \in \{Z_2, Z_1\}, Z_4 \cup T' \neq Z, T' \setminus Z_4 \neq \emptyset, Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$,

$(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset, Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T', Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z, Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D, T \setminus T' \neq \emptyset, T' \setminus T \neq \emptyset$,

$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T, Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D, T \setminus T' \neq \emptyset$,

$T' \setminus T \neq \emptyset, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T, Y_{T'}^\alpha \supseteq T', Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$,
 $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$
და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$;

13) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და
აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$;

14) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha$,
 $Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$,
 $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$.

15) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც Y_7^α, Y_6^α ,
 $Y_5^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.4-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-15 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-8) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.2.1-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.7-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.10-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.9-დან და 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.12-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.5.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset, Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_9)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_9)| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_2|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_9 \theta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4\}, D'_2 = \{Z_6, Z_5, Z_2\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_9)| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 9) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.5.1-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.5.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset, Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{10})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{10})| = (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + (4^{|D \setminus Z_4|} - 3^{|D \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus D|} + (4^{|D \setminus Z_2|} - 3^{|D \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{10} \theta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_3 = \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{10})| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)| + |I(D'_3)| + |I(D'_4)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 10) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.5.2-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.5.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset, Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{13})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{13})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{13}\theta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$ სამართლიანია, მაშინ $|I^*(Q_{13})| = |I(D'_1)|$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 13) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.5.3-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.5.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{14})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{14})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|D \setminus Z_2|} - 5^{|D \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{14}\theta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ $|I^*(Q_{14})| = |I(D'_1)|$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 14) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.5.4-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.5.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{15})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{15})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{15}\theta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{15})| = |I(D'_1)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 15) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.5.5-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} k_4 &= |I^*(Q_9)| + |I^*(Q_{10})| + |I^*(Q_{11})| + |I^*(Q_{12})| + |I^*(Q_{13})| + |I^*(Q_{14})| + |I^*(Q_{15})| = \\ &= 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ &+ (4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + 3^{(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

($|I^*(Q_{11})|$ და $|I^*(Q_{12})|$) იხილით შესაბამისად ლემა 2.3.3-ში და ლემა 2.3.4-ში).

თეორემა 2.5.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $|I_D| = k_1 + k_4$.

დამტკიცება: ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.5.1-დან.

მაგალითი 2.5.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_5 = \{4\}, P_6 = \{5\}, P_0 = P_4 = P_7 = \emptyset,$$

მაშინ $\bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_1 = \{2, 3, 4, 5\}$, $Z_2 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Z_3 = \{2, 4, 5\}$, $Z_4 = \{3, 4, 5\}$, $Z_5 = \{1, 3, 5\}$, $Z_6 = \{4\}$, $Z_7 = \{3, 5\}$ და

$$D = \{\{3, 5\}, \{4\}, \{1, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

გამომდინარე აქედან სამართლიანია შემდეგი ტოლობები და უტოლობები:

$$Z_6 \cap Z_5 = \{4\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset,$$

$$Z_7 \cap Z_3 = \{3, 5\} \cap \{2, 3, 5\} = \{3, 5\} \neq \emptyset,$$

სადაც $|I^*(Q_1)| = 8$, $|I^*(Q_2)| = 113$, $|I^*(Q_3)| = 100$, $|I^*(Q_4)| = 12$, $|I^*(Q_5)| = 17$, $|I^*(Q_6)| = 2$,

$|I^*(Q_7)| = 4$, $|I^*(Q_8)| = 2$, $|I^*(Q_9)| = 12$, $|I^*(Q_{10})| = 16$, $|I^*(Q_{11})| = 2$, $|I^*(Q_{12})| = 1$, $|I^*(Q_{13})| = 5$,

$|I^*(Q_{14})| = 1$, $|I^*(Q_{15})| = 1$, $|I_D| = 296$ (იხ. დამატება 5).

2.6. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$

და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 2.6.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \bar{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$,
 $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$,
 $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$,
 $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$,
 $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq Z_T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$,
 $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$
და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$;

13) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_Z^\alpha \times Z_Z)$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$,
 $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \emptyset$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$,
 $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

14) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც T, T', Z ,
 $Z' \in D$, $Z \in \{Z_5, Z_3\}$, $Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \subset Z' \subset \check{D}$, $T' \subset Z \subset Z'$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus Z \neq \emptyset$

, $Z \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$.

15) $\alpha = (Y_T^\alpha \times Z_T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T'' \cup Z_4}^\alpha \times (T'' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $T'' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T''$, $T \cup T' = Z_4$, $(T'' \cup Z_4) \cup Z = \check{D}$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T'' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T'' \neq \emptyset$, $(T'' \cup Z_4) \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (T'' \cup Z_4) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T''$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.5-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-15 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-15) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.4.1-დან და თეორემა 2.5.1-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.6.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_9)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_9)| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|} + 3^{|X \setminus Z_2|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_9 \theta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4\}, D'_2 = \{Z_7, Z_3, Z_1\}, D'_3 = \{Z_6, Z_5, Z_2\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_9)| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)| + |I(D'_3)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 9) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.6.1-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.6.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{10})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{10})| = (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ + (4^{|D \setminus Z_4|} - 3^{|D \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus D|} + (4^{|D \setminus Z_1|} - 3^{|D \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus D|} + (4^{|D \setminus Z_2|} - 3^{|D \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{10} \theta_{XI} = \{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\} \}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_3 = \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \\ D'_4 = \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, D'_5 = \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{10})| = \sum_{i=1}^5 |I(D'_i)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 10) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.6.2-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.6.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{13})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{13})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_3|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{13} \theta_{XI} = \{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\} \}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$, $D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{13})| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 13) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.6.3-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.6.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{14})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{14})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|D \setminus Z_1|} - 5^{|D \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus D|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|D \setminus Z_2|} - 5^{|D \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{14} \theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \quad D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{14})| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 14) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.6.4-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.6.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{15})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{15})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|X \setminus D|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{15} \theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{15})| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 15) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.6.5-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} k_5 &= |I^*(Q_9)| + |I^*(Q_{10})| + |I^*(Q_{11})| + |I^*(Q_{12})| + |I^*(Q_{13})| + |I^*(Q_{14})| + |I^*(Q_{15})| = \\ &= 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|} + 3^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ &+ (4^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_2 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|Z_2 \setminus Z_2|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|Z_1 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|} + \\ &+ (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|Z_1 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|Z_2 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

($|I^*(Q_{11})|$ და $|I^*(Q_{12})|$) იხილით შესაბამისად ლემა 2.3.3-ში და ლემა 2.3.4-ში).

თეორემა 2.6.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $|I_D| = k_1 + k_5$.

დამტკიცება: ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.6.1-დან.

მაგალითი 2.6.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_4 = \{4\}, P_5 = \{5\}, P_0 = P_6 = P_7 = \emptyset,$$

მაშინ $\bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_1 = \{2, 3, 4, 5\}$, $Z_2 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Z_3 = \{2, 4, 5\}$, $Z_4 = \{3, 5\}$, $Z_5 = \{1, 3, 4\}$, $Z_6 = \{5\}$,

$Z_7 = \{3\}$ და

$$D = \{\{3\}, \{5\}, \{1, 3, 4\}, \{3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

გამომდინარე აქედან სამართლიანია შემდეგი ტოლობები და უტოლობა:

$$Z_7 \cap Z_3 = \{3\} \cap \{2, 4, 5\} = \emptyset,$$

$$Z_6 \cap Z_5 = \{5\} \cap \{1, 3, 4\} = \emptyset,$$

$$Z_5 \cap Z_3 = \{1, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5\} = \{4\} \neq \emptyset$$

$$\text{სადაც } |I^*(Q_1)| = 8, |I^*(Q_2)| = 157, |I^*(Q_3)| = 182, |I^*(Q_4)| = 26, |I^*(Q_5)| = 33, |I^*(Q_6)| = 4,$$

$$|I^*(Q_7)| = 4, |I^*(Q_8)| = 6, |I^*(Q_9)| = 33, |I^*(Q_{10})| = 95, |I^*(Q_{11})| = 14, |I^*(Q_{12})| = 1, |I^*(Q_{13})| = 30,$$

$$|I^*(Q_{14})| = 6, |I^*(Q_{15})| = 2, |I_D| = 601 \text{ (იხ. დამატება 6).}$$

2.7. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ და

მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების იდემპოტენტური ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 2.7.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

$$1) \alpha = X \times T, \text{ სადაც } T \in D;$$

$$2) \alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T'), \text{ სადაც } T, T' \in D, T \subset T', Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\} \text{ და აკმაყოფილებენ}$$

$$\text{პირობებს: } Y_T^\alpha \supseteq T, Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset;$$

$$3) \alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T''), \text{ სადაც } T, T', T'' \in D, T \subset T' \subset T'', Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\} \text{ და}$$

$$\text{აკმაყოფილებენ პირობებს: } Y_T^\alpha \supseteq T, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T', Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset;$$

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \bar{D}$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$,
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$,
 $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$,
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$,
 $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$,
 $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$,
 $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$,
 $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$,
 $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$,
 $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$,
 $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$;

13) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$;

14) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', Z, Z' \in D$, $Z \in \{Z_5, Z_3\}$, $Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \subset Z' \subset \check{D}$, $T' \subset Z \subset Z'$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$.

15) $\alpha = (Y_T^\alpha \times Z_T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T'' \cup Z_4}^\alpha \times (T'' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $T'' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T''$, $T \cup T' = Z_4$, $(T'' \cup Z_4) \cup Z = \check{D}$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T'' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T'' \neq \emptyset$, $(T'' \cup Z_4) \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (T'' \cup Z_4) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$.

16) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$, ლემა 1.3.6-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-16 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_x(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-8), 10)-12), 14), 15) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.6.1-დან, 9) პირობის

სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.7-დან, 13) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.9-დან, ხოლო 16) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 2.1.5-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.7.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_9)|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_9)| = 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|} + 3^{|X \setminus Z_2|} + 3^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_9 \theta_{XI} = \{ \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, \bar{D}\} \}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4\}, D'_2 = \{Z_7, Z_3, Z_1\}, D'_3 = \{Z_6, Z_5, Z_2\}, D'_4 = \{Z_5, Z_3, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_9)| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)| + |I(D'_3)| + |I(D'_4)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 9) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.7.1-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.7.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{13})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{13})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|} + \\ + (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{13} \theta_{XI} = \{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, D'_3 = \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{13})| = |I(D'_1)| + |I(D'_2)| + |I(D'_3)| + |I(D'_4)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 13) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.7.2-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.7.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|I^*(Q_{16})|$ -ის სიმძლავრე შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$|I^*(Q_{16})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_{16}\theta_{XI} = \left\{ \left\{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D} \right\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$|I^*(Q_{16})| = |I(D'_1)|$$

(იხ. თეორემა 2.1.5). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 2.1.20-ის 16) პირობიდან ვღებულობთ ლემა 2.7.3-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} k_6 &= |I^*(Q_9)| + |I^*(Q_{10})| + |I^*(Q_{11})| + |I^*(Q_{12})| + |I^*(Q_{13})| + |I^*(Q_{14})| + |I^*(Q_{15})| + |I^*(Q_{16})| = \\ &= 3^{|X \setminus Z_4|} + 3^{|X \setminus Z_1|} + 3^{|X \setminus Z_2|} + 3^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \\ &+ (4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|} + \\ &+ (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} + (2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

($|I^*(Q_{10})|$, $|I^*(Q_{11})|$, $|I^*(Q_{12})|$, $|I^*(Q_{14})|$, $|I^*(Q_{15})|$) იხილეთ შესაბამისად ლემა 2.6.2-ში, ლემა 2.3.3-ში, ლემა 2.3.4-ში, ლემა 2.6.4-ში და ლემა 2.6.5-ში).

თეორემა 2.7.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და I_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე, მაშინ $|I_D| = k_1 + k_6$.

დამტკიცება: ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.7.1-დან.

მაგალითი 2.7.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_5 = \{4\}, P_0 = P_4 = P_6 = P_7 = \emptyset,$$

მაშინ $\check{D} = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z_1 = \{2, 3, 4\}$, $Z_2 = \{1, 3, 4\}$, $Z_3 = \{2, 4\}$, $Z_4 = \{3, 4\}$, $Z_5 = \{1, 3\}$, $Z_6 = \{4\}$, $Z_7 = \{3\}$ და $D = \{\{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

გამომდინარე აქედან სამართლიანია შემდეგი ტოლობა: $Z_5 \cap Z_3 = \{1, 3\} \cap \{2, 4\} = \emptyset$,

სადაც $|I^*(Q_1)| = 8$, $|I^*(Q_2)| = 73$, $|I^*(Q_3)| = 54$, $|I^*(Q_4)| = 6$, $|I^*(Q_5)| = 17$, $|I^*(Q_6)| = 2$, $|I^*(Q_7)| = 2$, $|I^*(Q_8)| = 2$, $|I^*(Q_9)| = 16$, $|I^*(Q_{10})| = 17$, $|I^*(Q_{11})| = 2$, $|I^*(Q_{12})| = 1$, $|I^*(Q_{13})| = 12$, $|I^*(Q_{14})| = 2$, $|I^*(Q_{15})| = 2$, $|I^*(Q_{16})| = 1$, $|I_D| = 217$ (იხ. დამატება 7).

2.8. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$

ნახევარჯგუფების მაქსიმალური ქვეჯგუფები

ამ პარაგრაფში მოცემულია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების მაქსიმალური ქვეჯგუფების სრული აღწერა. მანამდე კი განვიხილოთ რამდენიმე განმარტება და თეორემა, რომლის საფუძველზეც უშუალოდ ხდება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფების აღწერა.

განმარტება 2.8.1. ვიტყვი, რომ D ნახევარმესერის Y ელემენტი ფარავს Z ელემენტს, თუ $Y \supset Z$ და D -ში არ არსებობს ისეთი T ელემენტი, რომ $Y \supset T \supset Z$ (იხ.[1] განმარტება 1.9.1).

განმარტება 2.8.2. ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფი წარმოადგენს ჯგუფს, რომელიც მოცემული ნახევარჯგუფის სხვა ქვეჯგუფში არ შედის.

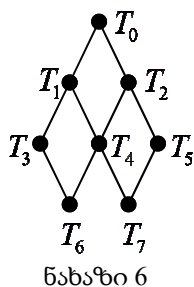
$G_X(D, \varepsilon)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფი, რომლის ერთეული არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართება. გამომდინარე აქედან შევნიშნოთ, რომ თუ ნახევარჯგუფს იდემპოტენტური ელემენტი არ გააჩნია, მაშინ ამ ნახევარჯგუფს ქვეჯგუფიც არ გააჩნია და აგრეთვე თუ ნახევარჯგუფს ორი ან მეტი იდემპოტენტური ელემენტი გააჩნია, მაშინ მაქსიმალური ქვეჯგუფები, რომელთა ერთეულოვან ელემენტებსაც ეს იდემპოტენტური ელემენტები წარმოადგენენ, არ თანაიკვეთებიან.

თეორემა 2.8.1. ნებისმიერი $\varepsilon \in B_X(D)$ იდემპოტენტური ელემენტისათვის, $G_X(D, \varepsilon)$ ჯგუფი ანტიიზომორფულია $V(D, \varepsilon)$ ნახევარმესერის ყველა სრული ავტომორფიზმების ჯგუფისა (იხ. [1], თეორემა 7.4.2) \square

ლემა 2.8.1. იმ ნახევარმესერების ავტომორფიზმთა რაოდენობა, რომლებიც განსაზღვრული არიან ნახაზი 5-ის 1), 2), 3), 4), 8), 13), 14) და 15) დიაგრამებით ტოლია 1-ის, იმ ნახევარმესერების ავტომორფიზმთა რაოდენობა, რომლებიც განსაზღვრული არიან ნახაზი 5-ის 5), 6), 7), 9), 10) 11) და 16) დიაგრამებით ტოლია 2-ის, ხოლო იმ ნახევარმესერების ავტომორფიზმთა რაოდენობა, რომლებიც განსაზღვრული არიან ნახაზი 5-ის 12) დიაგრამით ტოლია 4-ის.

დამტკიცება: მოცემული ლემა დავამტკიცოთ იმ ნახევარმესერისათვის, რომელიც განსაზღვრულია ნახაზი 5-ის მე-16)-ე დიაგრამით. დანარჩენი შემთხვევები დამტკიცდება ანალოგიურად.

დავუშვათ $Q = \{T_7, T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$ (იხ. ნახაზი 6) რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:



ნახაზი 6

$$\begin{aligned}
 &T_7 \subset T_5 \subset T_2 \subset T_0, \\
 &T_7 \subset T_4 \subset T_2 \subset T_0, \\
 &T_7 \subset T_4 \subset T_1 \subset T_0, \\
 &T_6 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, \\
 &T_6 \subset T_4 \subset T_2 \subset T_0, \\
 &T_6 \subset T_4 \subset T_1 \subset T_0.
 \end{aligned}
 \tag{2.8.1}$$

Q ნახევარმესერის დიაგრამა.

ვაჩვენოთ, რომ Q ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რაოდენობა ტოლია 2-ის. მართლაც, თუ $T_i(n_i, m_i)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ Q ნახევარმესერის ისეთ T_i ელემენტს, რომ $n_i = |Q_{T_i}|$, $m_i = |\dot{Q}_{T_i}|$ (იხ. ძირითადი აღნიშვნები 7) და 8) შესაბამისად) და φ არის Q ნახევარმესერის ნებისმიერი ავტომორფიზმი, მაშინ $\varphi(T_i) = T_j$ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $n_i = n_j$ და $m_i = m_j$, ე.ი.,

$$(n_i, m_i) = (n_j, m_j) \quad (2.8.2)$$

Q ნახევარმესერისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} T_0 = T_0(1, 8), \quad T_1 = T_1(2, 5), \quad T_2 = T_2(2, 5), \quad T_3 = T_3(3, 2), \\ T_4 = T_4(4, 3), \quad T_5 = T_5(3, 2), \quad T_6 = T_6(6, 1), \quad T_7 = T_7(6, 1). \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

ამიტომ, $\varphi(T_0) = T_0$ და $\varphi(T_4) = T_4$.

Q ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ T_7 და T_6 არიან მოცემული ნახევარმესერის მინიმალური ელემენტები. (2.8.3) ტოლობების თანახმად ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორ შემთხვევას:

$$\varphi(T_7) = T_7, \quad \varphi(T_6) = T_6 \quad \text{ან}$$

$$\varphi(T_7) = T_6, \quad \varphi(T_6) = T_7.$$

განვიხილოთ თითოეული მათგანი.

a) დავუშვათ, რომ $\varphi(T_7) = T_7$ და $\varphi(T_6) = T_6$. Q ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ T_5 და T_4 ელემენტები ფარავს T_7 -ს, ხოლო T_4 და T_3 ელემენტები ფარავს T_6 -ს. ყოველი ავტომორფიზმი დამფარავ ელემენტს შეუსაბამებს დამფარავ ელემენტს. მაგრამ ჩვენ გვაქვს, რომ $\varphi(T_4) = T_4$, ამიტომ $\varphi(T_5) = T_5$ და $\varphi(T_3) = T_3$. გარდა ამისა, T_2 და T_1 ელემენტები ფარავენ შესაბამისად T_5 და T_3 ელემენტებს, ამიტომ $\varphi(T_2) = T_2$ და $\varphi(T_1) = T_1$. ასე რომ ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს

$$\varphi = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 \\ T_0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 \end{pmatrix}$$

ე.ი. φ არის იგივეური ავტომორფიზმი.

b) დავუშვათ, რომ $\varphi(T_7)=T_6$ და $\varphi(T_6)=T_7$. თუ ჩვენ გამოვიყენებთ (2.8.3) ტოლობებს, მაშინ **a)** პუნქტის მტკიცების ანალოგიურად გვექნება: $\varphi(T_5)=T_3$, $\varphi(T_3)=T_5$ და $\varphi(T_2)=T_1$, $\varphi(T_1)=T_2$. ასე, რომ $\varphi = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 \\ T_0 & T_2 & T_1 & T_5 & T_4 & T_3 & T_7 & T_6 \end{pmatrix}$ არის Q ნახევარმესერის მეორე ავტომორფიზმი. ამრიგად, Q ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რაოდენობა 2-ის ტოლია.

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.8.2. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ε ბინარული მიმართებისათვის, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის $G_X(D, \varepsilon)$ ქვეჯგუფი წარმოადგენს ჯგუფს, რომლის რიგი არის ერთის, ორის ან ოთხის ტოლი.

დამტკიცება: როგორც ვიცით, ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ შემთხვევებს:

- a) $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$;
- b) $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$;
- c) $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$;
- d) $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$;
- e) $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$;
- f) $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$.

მოცემული თეორემა დავამტკიცოთ **f)** $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ შემთხვევისთვის. **a)–e)** შემთხვევები დამტკიცდება ანალოგიურად.

ვთქვათ ε არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ბინარული მიმართება. ახლა, თუ $V(D, \varepsilon)$ ნახევარმესერის ყველა სრულ ავტომორფიზმთა ჯგუფს Φ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ 2.8.1 თეორემის თანახმად გვექნება, რომ $G_X(D, \varepsilon)$ და Φ ჯგუფები ანტიიზომორფულია.

მოცემული თეორემის დამტკიცებისათვის ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართების მიმართ განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) თუ ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს 2.7.1 თეორემის 1)–4), 8), 13), 14) და 15) პირობებს, მაშინ $V(D, \varepsilon)$ ნახევარმესერის დიაგრამებს

შესაბამისად ექნებათ ნახაზი 5-ის 1, 2, 3, 4, 8, 13, 14 და 15 სახე. ამიტომ, ამ შემთხვევაში $V(D, \varepsilon)$ ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რაოდენობა ტოლი იქნება ერთის (იხ. ლემა 2.8.1). ახლა თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 2.8.1-ს, ჩვენ მივიღებთ რომ $|G_X(D, \varepsilon)| = 1$.

2) თუ ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს 2.7.1 თეორემის 5)–7), 9)–11) და 16) პირობებს, მაშინ $V(D, \varepsilon)$ ნახევარმესერის დიაგრამებს შესაბამისად ექნებათ ნახაზი 5-ის 5, 6, 7, 9, 10, 11 და 16 სახე. ამიტომ, ამ შემთხვევაში $V(D, \varepsilon)$ ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რაოდენობა ტოლი იქნება ორის (იხ. ლემა 2.8.1). ახლა თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 2.8.1-ს, ჩვენ მივიღებთ რომ $|G_X(D, \varepsilon)| = 2$.

3) თუ ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს 2.7.1 თეორემის 12) პირობას, მაშინ $V(D, \varepsilon)$ ნახევარმესერის დიაგრამებს შესაბამისად ექნებათ ნახაზი 5-ის 12 სახე. ამიტომ, ამ შემთხვევაში $V(D, \varepsilon)$ ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რაოდენობა ტოლი იქნება ოთხის (იხ. ლემა 2.8.1). ახლა თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 2.8.1-ს, მივიღებთ, რომ $|G_X(D, \varepsilon)| = 4$.

რადგანაც ნახაზი 5-ის დიაგრამები ამოწურავენ D ნახევარმესერის ყველა XI -ქვენახევარმესერებს, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$, ამიტომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ბინარული მიმართებები თეორემა 2.7.1-ის 1)–16) პირობებით ამოიწურებიან. აქედან გამომდინარეობს, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართებისათვის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის $G_X(D, \varepsilon)$ ქვეჯგუფის რიგი ტოლია ერთის, ორის ან ოთხის.

თეორემა დამტკიცებულია.

თავი III

რეგულარული ელემენტები

ამ თავში მოცემულია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების სრული აღწერა. როცა X არის სასრული სიმრავლე, გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დათვლილია მოცემული ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების რაოდენობა.

3.1. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$

ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების აღწერა

მოცემულ პარაგრაფში გამოყვანილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტების დათვლის ფორმულები. მანამდე კი განვიხილოთ რამდენიმე განმარტება და თეორემა.

განმარტება 3.1.1. α ელემენტს ალბუილი $B_X(D)$ ნახევარჯგუფიდან ეწოდება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, თუ მოიძებნება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ისეთი β ელემენტი, რომ $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha$.

განმარტება 3.1.2. რომელიმე φ ასახვას გაერთიანებათა სრულ X – ნახევარმესერებს D' და D'' შორის ეწოდება სრული იზომორფიზმი, თუ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\varphi(D_1) = \bigcup_{T' \in D_1} \varphi(T')$$

D' ნახევარმესერის ნებისმიერი არაცარიელი D_1 ქვესიმრავლისთვის.

(იხ. [68] განმარტება 6.3.2).

განმარტება 3.1.3. ვთქვათ $\alpha \in B_X(D)$. იტყვიან, რომ φ სრული იზომორფიზმი Q და D' ($Q, D' \subseteq D$) გაერთიანებათა სრულ X – ნახევარმესერებს შორის არის სრული α – იზომორფიზმი, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

a) $Q = V(D, \alpha)$;

b) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ თუ $\emptyset \in V(D, \alpha)$ და $\varphi(T)\alpha = T$ ნებისმიერი $T \in V(D, \alpha)$.

(იხ. [68] განმარტება 6.3.3).

თეორემა 3.1.1. ვთქვათ D სასრული გაერთიანებათა X – ნახევარმესერია; $\alpha \in B_X(D)$; $D(\alpha)$ არის $Q = V(D, \alpha) \setminus \{\emptyset\}$ ნახევარმესერის ყველა იმ T ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც არაზღვართია \check{Q}_T ($T \in Q$) სიმრავლეში და $\alpha = \bigcup_{T \in V(D, \alpha)} (Y_T^\alpha \times T)$ არის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენა. ასეთ შემთხვევაში α ბინარული მიმართება იქნება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $V(D, \alpha)$ გაერთიანებათა XI – ნახევარმესერია და რომელიღაც φ სრული α – იზომორფიზმისათვის $V(D, \alpha)$ და D' ($D' \subseteq D$) ნახევარმესერებს შორის სრულდება შემდეგი პირობები:

a) $\bigcup_{T' \in \check{D}(\alpha)_T} Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ყოველი $T \in D(\alpha)$ სათვის;

b) $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$ ყოველი არაზღვართი $T \in \check{D}(\alpha)_T$ – სათვის (იხ. [68], თეორემა 6.3.3).

თეორემა 3.1.2. ვთქვათ R_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $R(D') \cap R(D'') = \emptyset$ ნებისმიერი $D', D'' \in \Sigma_{XI}(D)$ და $D' \neq D''$;

b) $R_D = \bigcup_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} R(D')$;

c) თუ X არის სასრული სიმრავლე, მაშინ $|R_D| = \sum_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} |R(D')|$ (იხ. [68], თეორემა 6.3.6).

თეორემა 3.1.3. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 1$) არის D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_m$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის მოცემული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს

ისეთი φ სრული α -იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც $D' = \{\varphi(T_0), \varphi(T_1), \dots, \varphi(T_m)\}$ ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha \supseteq \varphi(T_p)$ და $Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \emptyset$ ნებისმიერი $p=0,1,\dots,m-1$ და $q=1,2,\dots,m$ -თვის (იხ. [68], თეორემა 13.1.1).

თეორემა 3.1.4. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T_3$ და $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=1}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის მოცემული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული α -იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც $D' = \{\varphi(T_1), \varphi(T_2), \dots, \varphi(T_m)\}$ ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1)$, $Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2)$, $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha \supseteq \varphi(T_k)$ და $Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \emptyset$, სადაც $k=4,5,\dots,m-1$ და $q=4,5,\dots,m$ (იხ. [68], თეორემა 13.2.1).

თეორემა 3.1.5. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერი და j ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, რომ $0 \leq j \leq m-3$ და

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}.$$

მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული α -იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც $D' = \{\varphi(T_0), \dots, \varphi(T_m)\}$ ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_j^\alpha \supseteq \varphi(T_{j+1}) \cap \varphi(T_{j+2}), Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha \supseteq \varphi(T_{j+2}),$$

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha \supseteq \varphi(T_p), Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \emptyset$$

ნებისმიერი $p = 0, 1, 2, \dots, m-1$, $q = 1, 2, \dots, m$ -თვის, ($p \neq j+2$, $q \neq j+3$) (იხ. [68] თეორემა 13.3.1).

თეორემა 3.1.6. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 5$) არის D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_1 \cap T_4 = \emptyset$ და

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, T_3 \setminus T_4 \neq \emptyset, T_4 \setminus T_3 \neq \emptyset, T_1 \cup T_2 = T_3, T_3 \cup T_4 = T_5$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ

წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=1}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის მოცემული

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული α – იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიდაც $D' = \{\varphi(T_1), \varphi(T_2), \dots, \varphi(T_m)\}$ ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\varphi(T_1) \cap \varphi(T_4) = \emptyset, Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1), Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2), Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4),$$

$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha \supseteq \varphi(T_k), Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \emptyset$$

ნებისმიერი $k = 5, 6, \dots, m-1$ და $q = 4, 6, \dots, m$ -თვის (იხ. [1], თეორემა 13.4.1).

თეორემა 3.1.7. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 6$) არის D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ და

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset, T_1 \cup T_2 = T_3, T_4 \cup T_5 = T_6$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ

წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=1}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის მოცემული

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

არსებობს ისეთი φ სრული α -იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც $D' = \{\varphi(T_1), \varphi(T_2), \dots, \varphi(T_m)\}$ ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1), Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2), Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4), \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5), Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha \supseteq \varphi(T_p), Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \emptyset$$

ნებისმიერი $p = 6, \dots, m-1$ და $q = 4, 5, 7, \dots, m$ -თვის (იხ. [68], თეორემა 13.5.1).

თეორემა 3.1.8. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის Q ქვენახევარმესერი არის ბადე. მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} (Y_{ij}^\alpha \times T_{ij})$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული α -იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_{00}^\alpha \supseteq \varphi(T_{0k}) \cap \varphi(T_{s0}), Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \supseteq \varphi(T_{01}), Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \cup Y_{02}^\alpha \supseteq \varphi(T_{02}), \dots \\ \dots, Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \cup Y_{02}^\alpha \cup \dots \cup Y_{0k}^\alpha \supseteq \varphi(T_{0k}), Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \supseteq \varphi(T_{10}), \\ Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \cup Y_{20}^\alpha \supseteq \varphi(T_{20}), \dots, Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \cup Y_{20}^\alpha \cup \dots \cup Y_{s0}^\alpha \supseteq \varphi(T_{s0}), Y_{ij}^\alpha \cap \varphi(T_{ij}) \neq \emptyset$$

ნებისმიერი $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\emptyset\}$ -თვის (იხ. [68], თეორემა 13.7.1).

თეორემა 3.1.9. ვთქვათ Q არის ნახევარმესერი, რომლის დიაგრამას აქვს მე-4 ნახაზზე მოცემული სახე. მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q \setminus \{T_0\}} (Y_{ij}^\alpha \times T_{ij}) \cup (Y_0^\alpha \times T_0)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული α -იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_0^\alpha \supseteq \varphi(T_0), Y_{00}^\alpha \supseteq \varphi(T_{00}), Y_{00}^\alpha \cup Y_{01}^\alpha \supseteq \varphi(T_{01}), Y_0^\alpha \cup Y_{00}^\alpha \cup Y_{10}^\alpha \cup \dots \cup Y_{i0}^\alpha \supseteq \varphi(T_{i0}),$$

$$Y_{01}^\alpha \cap \varphi(T_{01}) \neq \emptyset, Y_{i0}^\alpha \cap \varphi(T_{i0}) \neq \emptyset$$

ნებისმიერი $i = 2, 3, \dots, s$ -თვის (იხ. [68], თეორემა 13.10.1).

თეორემა 3.1.10. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 1$) არის ისეთი D გაერთიანებათა სრული X - ნახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_m$. თუ XI - ნახევარმესერები $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ და $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \dots, \bar{T}_m\}$ ერთმანეთის α - იზომორფულია და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$|R(D')| = m_0 \cdot \left(2^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_0|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|} - 2^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|}\right) \dots \left((m+1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus \bar{T}_m|}$$

(იხ. [68], თეორემა 13.1.2).

თეორემა 3.1.11. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის ისეთი D გაერთიანებათა სრული X - ნახევარმესერი, რომ $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T_3$ და $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$. თუ XI - ნახევარმესერები $Q = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ და $D' = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m\}$ ერთმანეთის α - იზომორფულია და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$|R(D')| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(4^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|} - 3^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|}\right) \dots \left(m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - (m-1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot m^{|X \setminus \bar{T}_m|}$$

(იხ. [68], თეორემა 13.2.2).

თეორემა 3.1.12. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) არის D გაერთიანებათა სრული X - ნახევარმესერი და j არის ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი, რომ $0 \leq j \leq m-3$ და

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}.$$

თუ XI - ნახევარმესერები $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ და $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \dots, \bar{T}_m\}$ ერთმანეთის α - იზომორფულია და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$\text{a) } |R(D')| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|} - 1\right) \cdot \left(2^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|} - 1\right) \cdot \left(5^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|} - 4^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|}\right) \dots$$

$$\dots \left((m+1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus \bar{T}_m|},$$

თუ $j = 0$ (ე.ი. $T_j = T_0$);

$$\text{b) } |R(D')| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_0|} - 1\right) \cdots \left((j+1)^{|\bar{T}_{j-1} \setminus \bar{T}_{j-2}|} - j^{|\bar{T}_{j-1} \setminus \bar{T}_{j-2}|}\right) \cdot (j+1)^{|\bar{T}_{j+1} \cap \bar{T}_{j+2}| \setminus \bar{T}_j|} \cdot \left((j+2)^{|\bar{T}_{j+1} \setminus \bar{T}_{j+2}|} - (j+1)^{|\bar{T}_{j+1} \setminus \bar{T}_{j+2}|}\right) \cdot \left((j+2)^{|\bar{T}_{j+2} \setminus \bar{T}_{j+1}|} - (j+1)^{|\bar{T}_{j+2} \setminus \bar{T}_{j+1}|}\right) \cdot \left((j+5)^{|\bar{T}_{j+4} \setminus \bar{T}_{j+3}|} - (j+4)^{|\bar{T}_{j+4} \setminus \bar{T}_{j+3}|}\right) \cdot \left((m+1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus \bar{T}_m|}.$$

თუ $1 \leq j \leq m-3$ ($T_j \neq T_0$) (იხ. [68], თეორემა 13.3.2).

თეორემა 3.1.13. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ($m \geq 5$) არის ისეთი D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერი, რომ $T_1 \cap T_4 = \emptyset$ და

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \quad T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m, \\ T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, \quad T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \quad T_3 \setminus T_4 \neq \emptyset, \quad T_4 \setminus T_3 \neq \emptyset, \quad T_1 \cup T_2 = T_3, \quad T_3 \cup T_4 = T_5.$$

თუ XI – ნახევარმესერები $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ და $D' = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m\}$ ერთმანეთის α – იზომორფულია და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$|R(D')| = m_0 \cdot \left(2^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\bar{T}_6 \setminus \bar{T}_5|} - 5^{|\bar{T}_6 \setminus \bar{T}_5|}\right) \cdots \left(m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - (m-1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot m^{|X \setminus \bar{T}_m|}$$

(იხ. [68], თეორემა 13.4.2).

თეორემა 3.1.14. ვთქვათ $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ არის ისეთი D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერი, რომ $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ და

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6, \quad T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6, \quad T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6, \quad T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6, \\ T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, \quad T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \quad T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, \quad T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset, \quad T_1 \cup T_2 = T_3, \quad T_4 \cup T_5 = T_6.$$

თუ XI – ნახევარმესერები Q და $D' = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_6\}$ ერთმანეთის α – იზომორფულია და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$|R(D')| = 4 \cdot m_0 \cdot 3^{|\bar{T}_4 \cap \bar{T}_5| \setminus \bar{T}_3|} \cdot \left(4^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_5|} - 3^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_5|}\right) \cdot \left(4^{|\bar{T}_5 \setminus \bar{T}_4|} - 3^{|\bar{T}_5 \setminus \bar{T}_4|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \bar{T}_6|}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.5.4).

თეორემა 3.1.15. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული X – ნახევარმესერის $Q = \{T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}, T_{20}, T_{21}\}$ ქვენახევარმესერი არის ზადე. თუ XI – ნახევარმესერები Q და $D' = \{\bar{T}_{00}, \bar{T}_{01}, \bar{T}_{10}, \bar{T}_{11}, \bar{T}_{20}, \bar{T}_{21}\}$ ერთმანეთის α – იზომორფულია და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$|R(D')| = m_0 \cdot \left(2^{|\bar{T}_{01} \setminus \bar{T}_{20}|} - 1\right) \cdot \left(2^{|\bar{T}_{10} \setminus \bar{T}_{01}|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\bar{T}_{20} \setminus \bar{T}_{11}|} - 2^{|\bar{T}_{20} \setminus \bar{T}_{11}|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \bar{T}_{21}|}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.7.3).

თეორემა 3.1.16 ვთქვათ $Q = \{T_0, T_{00}, T_{01}, T_{10}, \dots, T_{21}\}$ არის ნახევარმესერი, რომლის დიაგრამას აქვს მე-4 ნახაზზე მოცემული სახე. თუ XI -ნახევარმესერები Q და $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_{00}, \bar{T}_{01}, \bar{T}_{10}, \dots, \bar{T}_{21}\}$ ერთმანეთის α -იზომორფულია და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$|R(D')| = m_0 \cdot \left(2^{|T_{01} \setminus T_{20}|} - 1\right) \cdot \left(4^{|T_{20} \setminus T_{11}|} - 3^{|T_{20} \setminus T_{11}|}\right) \cdot 7^{|X \setminus T_{21}|}$$

(იხ. [68], შედეგი 13.10.2).

განმარტება 3.1.4. ვთქვათ $Q_i \vartheta_{XI}$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $\Sigma'_{XI}(X, D)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ϑ_{XI} ექვივალენტობის ის კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი Q_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 16$) გაერთიანებათა X -ნახევარმესერის იზომორფულია (იხ. განმარტება 2.1.6) და

$$R^*(Q_i) = \bigcup_{D' \in Q_i \vartheta_{XI}} R(D')$$

სადაც $i = 1, 2, \dots, 16$.

შევნიშნოთ, რომ რადგან $\Omega(Q) = Q \vartheta_{XI}$, ამიტომ $R(D')$ სიმრავლე შეიძლება ასეც განიმარტოს, კერძოდ, თუ $D' \in Q \vartheta_{XI}$, მაშინ $R(D')$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იმ რეგულარული α ელემენტების სიმრავლე, რომელთათვისაც Q და D' ერთმანეთის α -იზომორფულია და $V(D, \alpha) = D'$ (იხ. [68], განმარტება 6.3.5). \square

თეორემა 3.1.17. თუ X სასრული სიმრავლეა და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

- 1) $|R(Q_1)| = 1$;
- 2) $|R(Q_2)| = m_0 \cdot \left(2^{|T \setminus T'|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus T'|}$;
- 3) $|R(Q_3)| = m_0 \cdot \left(2^{|T \setminus T'|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T'' \setminus T'|}\right) \cdot 3^{|X \setminus T'|}$;
- 4) $|R(Q_4)| = m_0 \cdot \left(2^{|T \setminus T'|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T'' \setminus T'|}\right) \cdot \left(4^{|\bar{D} \setminus T'|} - 3^{|\bar{D} \setminus T'|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|}$;
- 5) $|R(Q_5)| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{|T \setminus T''|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T'' \setminus T'|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus (T' \cup T'')|}$;
- 6) $|R(Q_6)| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus T|} - 1\right) \cdot 2^{|(Z \cap Z') \setminus Z_4|} \cdot \left(3^{|Z \setminus Z'|} - 2^{|Z \setminus Z'|}\right) \cdot \left(3^{|Z' \setminus Z|} - 2^{|Z' \setminus Z|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|}$;

$$7) |R(Q_7)| = 2 \cdot m_0 \cdot (2^{|T \setminus T'|} - 1) \cdot (2^{|T'' \setminus T'''} - 1) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus (T' \cup T'')} - 4^{|\bar{D} \setminus (T' \cup T''')}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$8) |R(Q_8)| = 2 \cdot m_0 \cdot (2^{|T \setminus Z|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus T'|} - 1) \cdot (3^{|Z \setminus (Z_4 \cup T')|} - 2^{|Z \setminus (Z_4 \cup T''')|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$9) |R(Q_9)| = 2 \cdot m_0 \cdot 3^{|X \setminus (T \cup T')|};$$

$$10) |R(Q_{10})| = 2 \cdot m_0 \cdot (4^{|T'' \setminus (T \cup T')|} - 3^{|T'' \setminus (T \cup T''')|}) \cdot 4^{|X \setminus T''|};$$

$$11) |R(Q_{11})| = 2 \cdot m_0 \cdot (4^{|Z \setminus Z_4|} - 3^{|Z \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$12) |R(Q_{12})| = 4 \cdot m_0 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$13) |R(Q_{13})| = m_0 \cdot (2^{|T'' \setminus (T' \cup T)|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z|};$$

$$14) |R(Q_{14})| = m_0 \cdot (2^{|Z \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$15) |R(Q_{15})| = m_0 \cdot (2^{|T'' \setminus Z|} - 1) \cdot (4^{|Z \setminus (T'' \cup Z_4)|} - 3^{|Z \setminus (T'' \cup Z_4)|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|};$$

$$16) |R(Q_{16})| = 2 \cdot m_0 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|}.$$

დამტკიცება: 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.10-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.12-დან, 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.18-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.11-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1.14-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.13-დან, ხოლო 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.16-დან.

ახლა ვაჩვენოთ 16) პირობის სამართლიანობა, რომელიც ჩამოვყალიბოთ შემდეგი ლემის სახით:

ლემა 3.1.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. მაშინ α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_0^\alpha \times \bar{D}) \cup \bigcup_{i=1}^7 (Y_i^\alpha \times Z_i)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\emptyset\}$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული

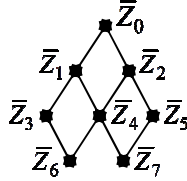
α -იზომორფიზმი D ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც

$D' = \{\bar{Z}_7, \bar{Z}_6, \bar{Z}_5, \bar{Z}_4, \bar{Z}_3, \bar{Z}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_0\}$ (იხ. ნახაზი 7) XI - ქვენახევარმესერზე

$$\varphi = \begin{pmatrix} Z_7 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \check{D} \\ \bar{Z}_7 & \bar{Z}_6 & \bar{Z}_5 & \bar{Z}_4 & \bar{Z}_3 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 & \bar{Z}_0 \end{pmatrix}$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_7^\alpha \supseteq \bar{Z}_7, Y_6^\alpha \supseteq \bar{Z}_6, Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \bar{Z}_5, Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \bar{Z}_3, Y_5^\alpha \cap \bar{Z}_5 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap \bar{Z}_3 \neq \emptyset$$



ნახაზი 7
 D' ნახევარმესერის დიაგრამა

დამტკიცება: ვთქვათ $D(\alpha) = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\}$, ცხადია რომ $D(\alpha)$ არის D

ნახევარმესერის წარმომქმნელთა სისტემა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} \check{D}(\alpha)_{Z_7} &= \{Z_7\}, \check{D}(\alpha)_{Z_6} = \{Z_6\}, \check{D}(\alpha)_{Z_5} = \{Z_7, Z_5\}, \check{D}(\alpha)_{Z_4} = \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \\ \check{D}(\alpha)_{Z_3} &= \{Z_6, Z_3\}, \check{D}(\alpha)_{Z_2} = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \check{D}(\alpha)_{Z_1} = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}. \end{aligned}$$

3.1.1 თეორემის a) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} Y_7^\alpha \supseteq \bar{Z}_7, Y_6^\alpha \supseteq \bar{Z}_6, Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \bar{Z}_5, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \bar{Z}_4, Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \bar{Z}_3, \\ Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \bar{Z}_2, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \bar{Z}_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \bar{Z}_7 \cup \bar{Z}_6 \cup Y_4^\alpha = \bar{Z}_4 \cup Y_4^\alpha \supseteq \bar{Z}_4, \\ Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha = (Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha) \cup (Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha) \cup Y_2^\alpha \supseteq \\ \supseteq \bar{Z}_5 \cup \bar{Z}_4 \cup Y_2^\alpha = \bar{Z}_2 \cup Y_2^\alpha \supseteq \bar{Z}_2, \\ Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha = (Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha) \cup (Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha) \cup Y_1^\alpha \supseteq \\ \supseteq \bar{Z}_4 \cup \bar{Z}_3 \cup Y_1^\alpha = \bar{Z}_1 \cup Y_1^\alpha \supseteq \bar{Z}_1, \end{aligned}$$

ე.ი., შემდეგი ჩართვები

$$\begin{aligned} Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \bar{Z}_4, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \bar{Z}_2, \\ Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \bar{Z}_1 \end{aligned}$$

არის ყოველთვის სამართლიანი. აგრეთვე ადვილად შემოწმდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა

$$\begin{aligned}
l(\ddot{D}_{Z_7}, Z_7) &= \cup(\ddot{D}_{Z_7} \setminus \{Z_7\}) = \emptyset, Z_7 \setminus l(\ddot{D}_{Z_7}, Z_7) = Z_7 \setminus \emptyset \neq \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_6}, Z_6) &= \cup(\ddot{D}_{Z_6} \setminus \{Z_6\}) = \emptyset, Z_6 \setminus l(\ddot{D}_{Z_6}, Z_6) = Z_6 \setminus \emptyset \neq \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_5}, Z_5) &= \cup(\ddot{D}_{Z_5} \setminus \{Z_5\}) = Z_7, Z_5 \setminus l(\ddot{D}_{Z_5}, Z_5) = Z_5 \setminus Z_7 \neq \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_3}, Z_3) &= \cup(\ddot{D}_{Z_3} \setminus \{Z_3\}) = Z_6, Z_3 \setminus l(\ddot{D}_{Z_3}, Z_3) = Z_3 \setminus Z_6 \neq \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_4}, Z_4) &= \cup(\ddot{D}_{Z_4} \setminus \{Z_4\}) = Z_4, Z_4 \setminus l(\ddot{D}_{Z_4}, Z_4) = Z_4 \setminus Z_4 = \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_2}, Z_2) &= \cup(\ddot{D}_{Z_2} \setminus \{Z_2\}) = Z_2, Z_2 \setminus l(\ddot{D}_{Z_2}, Z_2) = Z_2 \setminus Z_2 = \emptyset; \\
l(\ddot{D}_{Z_1}, Z_1) &= \cup(\ddot{D}_{Z_1} \setminus \{Z_1\}) = Z_1, Z_1 \setminus l(\ddot{D}_{Z_1}, Z_1) = Z_1 \setminus Z_1 = \emptyset.
\end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ Z_7, Z_6, Z_5, Z_3 ელემენტები არიან შესაბამისად $\ddot{D}(\alpha)_{Z_7}, \ddot{D}(\alpha)_{Z_6}, \ddot{D}(\alpha)_{Z_5}$ და $\ddot{D}(\alpha)_{Z_3}$ სიმრავლეების არაზღვარიანი ელემენტები. ახლა 3.1.1 თეორემის b პირობის თანახმად კი მივიღებთ, რომ

$$Y_7^\alpha \cap \bar{Z}_7 \neq \emptyset, Y_6^\alpha \cap \bar{Z}_6 \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap \bar{Z}_5 \neq \emptyset \text{ და } Y_3^\alpha \cap \bar{Z}_3 \neq \emptyset$$

რადგანაც შემდეგი ჩართვები $Z_7 \subset Z_5, Z_6 \subset Z_3$ სამართლიანია, ამიტომ მივიღებთ $Y_5^\alpha \cap \bar{Z}_5 \neq \emptyset$ და $Y_3^\alpha \cap \bar{Z}_3 \neq \emptyset$.

გამომდინარე აქედან ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს:

$$Y_7^\alpha \supseteq \bar{Z}_7, Y_6^\alpha \supseteq \bar{Z}_6, Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \bar{Z}_5, Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \bar{Z}_3, Y_5^\alpha \cap \bar{Z}_5 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap \bar{Z}_3 \neq \emptyset$$

ლემა დამტკიცებულია.

განმარტება 3.1.5. დავუშვათ, რომ $D' \in \Sigma_2(X, 8)$. $R(D')$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იმ რეგულარული α ელემენტების სიმრავლე, რომელთათვისაც D და D' ერთმანეთის α -იზომორფულია და $V(D, \alpha) = D'$ (იხ. [68], განმარტება 6.3.5).

განმარტება 3.1.6. ვთქვათ Q და D' არიან D გაერთიანებათა X – ნახევარმესერის გაერთიანებათა XI და X – ქვენახევარმესერები. მაშინ $R_\varphi(Q, D')$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ისეთი ქვესიმრავლე, რომლისთვისაც $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ მხოლოდ მაშინ, როცა α და φ ელემენტებისათვის შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

- a) α არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი;
- b) $V(D, \alpha) = Q$;

c) φ არის სრული α -იზომორფიზმი Q და D' ნახევარმესერებს შორის, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 4.1.3-ის b), c) და d) პირობებს (იხ. [68] თეორემა 6.3.4).

თეორემა 3.1.18. ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა. თუ φ არის $\Phi(Q, D')$ სიმრავლის რომელიღაც ფიქსირებული ელემენტი და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$|R(D')| = m_0 \cdot q \cdot |R_\varphi(Q, D')|$$

(იხ. [68] თეორემა 6.3.5).

როგორც ვიცით მოცემული $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ ნახევარმესერის ავტომორფიზმათა რაოდენობა $q = 2$ (იხ. ლემა 2.8.1).

ლემა 3.1.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ და $|\Sigma_2(X, 8)| = m_0$. თუ X სასრული სიმრავლეა და XI -ნახევარმესერები D და $D' = \{\bar{Z}_7, \bar{Z}_6, \bar{Z}_5, \bar{Z}_4, \bar{Z}_3, \bar{Z}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_0\}$ ერთმანეთის α -იზომორფულია, მაშინ

$$|R(D')| = 2 \cdot m_0 \cdot (2^{|\bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_1|} - 1) \cdot (2^{|\bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2|} - 1) \cdot 8^{|\bar{X} \setminus \bar{Z}_0|}$$

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ $\alpha \in R(D')$ და α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_0^\alpha \times \bar{D}) \cup \bigcup_{i=1}^7 (Y_i^\alpha \times Z_i)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\emptyset\}$ (ე.ი., $D = V(D, \alpha)$, იხ. თეორემა 2.1.2) აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_7^\alpha \supseteq \bar{Z}_7, Y_6^\alpha \supseteq \bar{Z}_6, Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \bar{Z}_5, Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \bar{Z}_3, Y_5^\alpha \cap \bar{Z}_5 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap \bar{Z}_3 \neq \emptyset \quad (3.1)$$

ვთქვათ f_α არის X სიმრავლის D ნახევარმესერში ისეთი ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $f_\alpha(t) = t\alpha$ ნებისმიერი $t \in X$ ელემენტისათვის, $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}$ სიმბოლოებით აღნიშნულია f_α ასახვის შეზღუდვები შესაბამისად $\bar{Z}_7, \bar{Z}_6, \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2, \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1, X \setminus \bar{Z}_0$ სიმრავლეებზე. შევნიშნოთ, რომ $\{\bar{Z}_7, \bar{Z}_6, \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2, \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1, X \setminus \bar{Z}_0\}$ სიმრავლის ელემენტები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება ტოლია X სიმრავლის.

შევისწავლოთ $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}$ ასახვათა თვისებები.

1) $t \in \bar{Z}_7$. მაშინ (3.1) ჩართვების თანახმად $t \in \bar{Z}_7 \subseteq Y_7^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_7^\alpha$ და Y_7^α სიმრავლის განმარტების თანახმად $t\alpha = Z_7$. ამიტომ $f_{1\alpha}(t) = Z_7$ ყოველი $t \in \bar{Z}_7$ -ელემენტისათვის.

2) $t \in \bar{Z}_6$. მაშინ (3.1) ჩართვების თანახმად $t \in \bar{Z}_6 \subseteq Y_6^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_6^\alpha$ და Y_6^α სიმრავლის განმარტების თანახმად $t\alpha = Z_6$. ამიტომ $f_{2\alpha}(t) = Z_6$ ყოველი $t \in \bar{Z}_6$ -ელემენტისათვის.

3) $t \in \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2$. მაშინ (3.1) ჩართვების თანახმად $t \in \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2 \subseteq \bar{Z}_3 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha$ და Y_6^α და Y_3^α სიმრავლეების განმარტების თანახმად $t\alpha \in \{Z_6, Z_3\}$. ამიტომ $f_{3\alpha}(t) \in \{Z_6, Z_3\}$ ყოველი $t \in \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2$ -ელემენტისათვის.

მეორეს მხრივ $Y_3^\alpha \cap \bar{Z}_3 \neq \emptyset$, ამიტომაც $t_3\alpha = Z_3$ რომელიღაც $t_3 \in \bar{Z}_3$ ელემენტისათვის. თუ $t_3 \in \bar{Z}_2$, მაშინ $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად გვექნება $t_3 \in Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha$, ე.ი., $t\alpha \in \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t_3\alpha = Z_3$ ტოლობას, რადგანაც $Z_3 \notin \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$. ამრიგად, $f_{3\alpha}(t_3) = Z_3$ რომელიღაც $t \in \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2$.

4) $t \in \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1$. მაშინ (3.1) ჩართვების თანახმად $t \in \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1 \subseteq \bar{Z}_5 \subseteq Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha$ და Y_7^α და Y_5^α სიმრავლეების განმარტების თანახმად $t\alpha \in \{Z_7, Z_5\}$. ამიტომ $f_{4\alpha}(t) \in \{Z_7, Z_5\}$ ყოველი $t \in \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1$ -ელემენტისათვის.

მეორეს მხრივ $Y_5^\alpha \cap \bar{Z}_5 \neq \emptyset$, ამიტომაც $t_5\alpha = Z_5$ რომელიღაც $t_5 \in \bar{Z}_5$ ელემენტისათვის. თუ $t_5 \in \bar{Z}_1$, მაშინ $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად გვექნება $t_5 \in Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$ ე.ი., $t\alpha \in \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t_5\alpha = Z_5$ ტოლობას, რადგანაც $Z_5 \notin \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$.

ამრიგად, $f_{4\alpha}(t_5) = Z_5$ რომელიღაც $t \in \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1$.

5) $t \in X \setminus \bar{Z}_0$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენიდან და (3.1) პირობებიდან გვექნება, რომ $t \in X \setminus \bar{D} \subseteq X = Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_0^\alpha$

$Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად გვექნება $t\alpha \in \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$. ამიტომ $f_{5\alpha}(t) \in \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ ყოველი $t \in X \setminus \bar{Z}_0$.

ამრიგად, ყოველი $\alpha \in R(D')$ ბინარული მიმართებისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ დალაგებული სისტემა. ცხადია, რომ განსხვავებულ ბინარულ მიმართებებს ეთანადება $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ სახის განსხვავებული სისტემები.

ახლა ვთქვათ $f_1: \bar{Z}_7 \rightarrow \{Z_7\}$, $f_2: \bar{Z}_6 \rightarrow \{Z_6\}$, $f_3: \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2 \rightarrow \{Z_6, Z_3\}$, $f_4: \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1 \rightarrow \{Z_7, Z_5\}$, $f_5: X \setminus \bar{Z}_0 \rightarrow D$ არიან ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

- 6) $f_1(t) \in \{Z_7\}$, ნებისმიერი $t \in \bar{Z}_7$;
- 7) $f_2(t) \in \{Z_6\}$, ნებისმიერი $t \in \bar{Z}_6$;
- 8) $f_3(t) \in \{Z_6, Z_3\}$, ნებისმიერი $t \in \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2$ და $f_3(t_3) = Z_3$ რომელიმე $t_3 \in \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2$;
- 9) $f_4(t) \in \{Z_7, Z_5\}$, ნებისმიერი $t \in \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1$ და $f_4(t_4) = Z_5$ რომელიმე $t_4 \in \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1$;
- 10) $f_5(t) \in \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus \bar{Z}_0$.

ახლა განვმარტოთ $f: X \rightarrow D$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in \bar{Z}_7, \\ f_2(t), & t \in \bar{Z}_6, \\ f_3(t), & t \in \bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2, \\ f_4(t), & t \in \bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1, \\ f_5(t), & t \in X \setminus \bar{Z}_0. \end{cases}$$

და f ასახვას შევუსაბამოთ ბინარული $\beta = \bigcup_{t \in X} (\{t\} \times f(t))$ მიმართება. ვთქვათ

$Y_0^\beta = \{t \mid t\beta = \bar{D}\}$ და $Y_i^\beta = \{t \mid t\beta = Z_i\}$ ($i=1, 2, 3, \dots, 7$). მაშინ β ბინარული მიმართება შეიძლება

წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\beta = (Y_7^\beta \times Z_7) \cup (Y_6^\beta \times Z_6) \cup (Y_5^\beta \times Z_5) \cup (Y_4^\beta \times Z_4) \cup (Y_3^\beta \times Z_3) \cup (Y_2^\beta \times Z_2) \cup (Y_1^\beta \times Z_1) \cup (Y_0^\beta \times \bar{D})$$

უფრო მეტიც β ბინარული მიმართების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს შემდეგი პირობების სამართლიანობა:

$$Y_7^\beta \supseteq \bar{Z}_7, Y_6^\beta \supseteq \bar{Z}_6, Y_7^\beta \cup Y_5^\beta \supseteq \bar{Z}_5, Y_6^\beta \cup Y_3^\beta \supseteq \bar{Z}_3, Y_5^\beta \cap \bar{Z}_5 \neq \emptyset, Y_3^\beta \cap \bar{Z}_3 \neq \emptyset$$

გამომდინარე აქედან და ლემა 3.1.1-დან მივიღებთ, რომ β ბინარული მიმართება იქნე-

ბა $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი ე. ი. $\beta \in R(D')$.

ამრიგად, მივიღეთ რომ ყველა $\alpha \in R(D')$ ბინარულ მიმართებებსა და ასახვათა $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ სისტემებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა.

თეორემა 2.1.1-დან გამომდინარე $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}$ ასახვათა რაოდენობა შესაბამისად ტოლი იქნება:

$$1, 1, 2^{|\bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2| - 1}, 2^{|\bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1| - 1}, 8^{|\bar{X} \setminus \bar{Z}_0|}$$

ამ შემთხვევაში და თეორემა 3.1.18-ის გათვალისწინებით მოცემული $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ სახის დალაგებული სისტემების რაოდენობა ან კიდევ $R(D')$ სიმრავლის სიმძლავრე $|R(D')|$ გამოითვლება ფორმულით:

$$|R(D')| = 2 \cdot m_0 \cdot (2^{|\bar{Z}_5 \setminus \bar{Z}_1|} - 1) \cdot (2^{|\bar{Z}_3 \setminus \bar{Z}_2|} - 1) \cdot 8^{|\bar{X} \setminus \bar{Z}_0|}$$

ლემა დამტკიცებულია. ამით კი თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

3.2. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები

როგორც იდემპოტენტური ელემენტების აღწერის შემთხვევაში, რეგულარული ელემენტების აღწერის დროსაც განიხილება 6 შემთხვევა და თითოეული შემთხვევისთვის აღიწერება რეგულარული ელემენტები. მოცემულ პარაგრაფში კი განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 3.2.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული α -

იზომორფიზმი $V(D, \alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

$$1) \alpha = X \times T, \text{ სადაც } T \in D;$$

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \check{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$Y_T^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T'), \quad Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4), \quad Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z), \quad Y_T^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset, \quad Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset, \\ Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset.$$

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.1-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-8 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.3-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.5-დან და 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.8-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

1. ლემა 3.2.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_1)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.2.1-ის 1) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_1)| = 8$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_1 \mathcal{G}_{XI} = \left\{ \{Z_7\}, \{Z_6\}, \{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7\}, D'_2 = \{Z_6\}, D'_3 = \{Z_5\}, D'_4 = \{Z_4\} \\ D'_5 = \{Z_3\}, D'_6 = \{Z_2\}, D'_7 = \{Z_1\}, D'_8 = \{\bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$|R^*(Q_1)| = \sum_{i=1}^8 |R(D'_i)|$$

(იხ. თეორემა 3.1.2). ბოლო ტოლობიდან და თეორემა 3.1.17-დან გვექნება, რომ

$$|R^*(Q_1)| = 1+1+1+1+1+1+1+1 = 8.$$

ლემა დამტკიცებულია.

2. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა

3.2.1-ის 2) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_2\theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_5\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, \check{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_1\}, \right. \\ \left. \{Z_6, \check{D}\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, \check{D}\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, \check{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \check{D}\}, \{Z_2, \check{D}\}, \{Z_1, \check{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, \check{D}\}, D'_2 = \{Z_6, \check{D}\}, D'_3 = \{Z_4, \check{D}\}, D'_4 = \{Z_7, Z_4\}, D'_5 = \{Z_7, Z_2\}, \\ D'_6 = \{Z_7, Z_1\}, D'_7 = \{Z_6, Z_4\}, D'_8 = \{Z_6, Z_3\}, D'_9 = \{Z_6, Z_2\}, D'_{10} = \{Z_6, Z_1\}, \\ D'_{11} = \{Z_5, Z_2\}, D'_{12} = \{Z_5, \check{D}\}, D'_{13} = \{Z_4, Z_2\}, D'_{14} = \{Z_4, Z_1\}, D'_{15} = \{Z_7, Z_5\}, \\ D'_{16} = \{Z_3, Z_1\}, D'_{17} = \{Z_3, \check{D}\}, D'_{18} = \{Z_2, \check{D}\}, D'_{19} = \{Z_1, \check{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_2) = \bigcup_{i=1}^{19} R(D'_i) \quad (3.2.1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.2.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_2)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.2.1-ის 2) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_2)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)| - |R(D'_3)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $D' = \{Z, Z'\} \in Q_2\theta_{XI}$, $Z \subset Z'$ და $\alpha \in R(D')$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ რომელიც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \neq \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.2.1-ის 2) პირობის თანახმად აკმაყოფილებენ პირობას: $Y_T^\alpha \supseteq Z$ და $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$. რადგანაც Z_7 და Z_6 არიან D ნახევარმესერის მინიმალური ელემენტები, ამიტომ გვექნება $Z \supseteq Z_7$ ან $Z \supseteq Z_6$.

მეორეს მხრივ, \check{D} ელემენტი არის D ნახევარმესერის მაქსიმალური ელემენტი, ამიტომ $\check{D} \supseteq Z'$. გამომდინარე აქედან, მოცემულ შემთხვევაში სამართლიანია მხოლოდ ერთი შემდეგი ორი პირობიდან:

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \text{ და } Y_T^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset \text{ ან}$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6 \text{ და } Y_T^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$$

ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$ ან $\alpha \in R(D'_2)$. ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვებს: $R(D') \subseteq R(D'_1)$ ან $R(D') \subseteq R(D'_2)$. გამომდინარე აქედან და (3.2.1) ტოლობის თანახმად გვექნება:

$$R^*(Q_2) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.2.2)$$

ახლა ვთქვათ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$. მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 2) პირობის თანახმად გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset; \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_T^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$, ე.ი. $\alpha \in R(D'_3)$ და

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) \subseteq R(D'_3)$$

მეორეს მხრივ, თუ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ $Y_T^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$ და (3.2.3) პირობები სამართლიანია. გამომდინარე აქედან $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, ე.ი.

$$R(D'_3) \subseteq R(D'_1) \cap R(D'_2).$$

ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = R(D'_3) \quad (3.2.4)$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.2.2) და (3.2.4) ტოლობებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} |R^*(Q_2)| &= |R(D'_1)| + |R(D'_2)| - |R(D'_1) \cap R(D'_2)| = \\ &= |R(D'_1)| + |R(D'_2)| - |R(D'_3)|. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.3. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(D_2)| = 19 \cdot \left(2^{|\check{D} \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|\check{X} \setminus \check{D}|} + 19 \cdot \left(2^{|\check{D} \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|\check{X} \setminus \check{D}|} - 19 \cdot \left(2^{|\check{D} \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|\check{X} \setminus \check{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_2)| = 19$, ამიტომ თეორემა 3.1.17-ის 2) პირობისა და ლემა 3.2.2-ის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} |R^*(D_2)| &= |R(D'_1)| + |R(D'_2)| - |R(D'_3)| = \\ &= 19 \cdot (2^{|\bar{D} \setminus Z_7|} - 1) \cdot 2^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + 19 \cdot (2^{|\bar{D} \setminus Z_6|} - 1) \cdot 2^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - 19 \cdot (2^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 1) \cdot 2^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

3. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა

3.2.1-ის 3) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} Q_3 \theta_{XI} = & \{ \{Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_1, \bar{D}\}, \\ & \{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_1, \bar{D}\}, \\ & \{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_3, Z_1, \bar{D}\} \}. \end{aligned}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_5, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_4, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_7, Z_2, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_7, Z_1, \bar{D}\}, D'_5 = \{Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \\ D'_6 &= \{Z_6, Z_3, \bar{D}\}, D'_7 = \{Z_6, Z_2, \bar{D}\}, D'_8 = \{Z_6, Z_1, \bar{D}\}, D'_9 = \{Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_{10} = \{Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \\ D'_{11} &= \{Z_7, Z_5, Z_2\}, D'_{12} = \{Z_7, Z_4, Z_2\}, D'_{13} = \{Z_7, Z_4, Z_1\}, D'_{14} = \{Z_6, Z_4, Z_2\}, \\ D'_{15} &= \{Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_{16} = \{Z_6, Z_3, Z_1\}, D'_{17} = \{Z_5, Z_2, \bar{D}\}, D'_{18} = \{Z_3, Z_1, \bar{D}\} \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_3) = \bigcup_{i=1}^{18} R(D'_i) \quad (3.2.5)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.2.4. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X

სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_3)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის

ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა

3.2.1-ის 3) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned} |R^*(Q_3)| &= |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| + |R(D'_4)| + |R(D'_5)| + |R(D'_6)| + |R(D'_7)| + |R(D'_8)| - \\ & - |R(D'_9)| - |R(D'_{10})| - |R(D'_1) \cap R(D'_3)| - |R(D'_2) \cap R(D'_3)| - |R(D'_2) \cap R(D'_4)| - \\ & - |R(D'_5) \cap R(D'_7)| - |R(D'_5) \cap R(D'_8)| - |R(D'_6) \cap R(D'_8)|. \end{aligned}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $D' = \{Z, Z', Z''\} \in Q_3 \theta_{XI}$ ($Z \subset Z' \subset Z''$) და $\alpha \in R(D')$. მაშინ α

ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ რომელიც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და

თეორემა 3.2.1-ის 3) პირობის თანახმად აკმაყოფილებენ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$ და $Y_{T''}^\alpha \cap Z'' \neq \emptyset$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $Z \supseteq Z_7$ ან $Z \supseteq Z_6$ და $\check{D} \supseteq Z''$. გამომდინარე აქედან და პირობებიდან, რომ $Y_T^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap Z'' \neq \emptyset$, გვექნება:

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z', Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset \text{ ან}$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z', Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset,$$

ე.ი., $\alpha \in R(D_1'')$ ან $\alpha \in R(D_2'')$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $R(D') \subseteq R(D_1'')$ ან $R(D') \subseteq R(D_2'')$, სადაც $D_1'' = \{Z_7, Z', \check{D}\}$ და $D_2'' = \{Z_6, Z', \check{D}\}$, ე.ი.

$$R(D_9') \subseteq R(D_3'), R(D_{10}') \subseteq R(D_4'), R(D_{11}') \subseteq R(D_1'), R(D_{12}') \subseteq R(D_2'),$$

$$R(D_{13}') \subseteq R(D_2'), R(D_{14}') \subseteq R(D_5'), R(D_{15}') \subseteq R(D_5'), R(D_{16}') \subseteq R(D_6'),$$

$$R(D_{17}') \subseteq R(D_3'), R(D_{18}') \subseteq R(D_8').$$

ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$R^*(Q_3) = \bigcup_{i=1}^8 R(D_i') \quad (3.2.6)$$

ახლა ვაჩვენოთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$R(D_1') \cap R(D_4') = \emptyset, R(D_1') \cap R(D_5') = \emptyset, R(D_1') \cap R(D_6') = \emptyset, R(D_1') \cap R(D_8') = \emptyset,$$

$$R(D_2') \cap R(D_5') = \emptyset, R(D_2') \cap R(D_7') = \emptyset, R(D_2') \cap R(D_8') = \emptyset, R(D_3') \cap R(D_4') = \emptyset,$$

$$R(D_3') \cap R(D_5') = \emptyset, R(D_3') \cap R(D_6') = \emptyset, R(D_3') \cap R(D_8') = \emptyset, R(D_4') \cap R(D_5') = \emptyset,$$

$$R(D_4') \cap R(D_7') = \emptyset, R(D_6') \cap R(D_7') = \emptyset, R(D_7') \cap R(D_8') = \emptyset.$$

$$R(D_1') \cap R(D_2') = R(D_1') \cap R(D_2') \cap R(D_3'), R(D_1') \cap R(D_7') = R(D_1') \cap R(D_3') \cap R(D_7'),$$

$$R(D_2') \cap R(D_6') = R(D_2') \cap R(D_4') \cap R(D_6') = R(D_2') \cap R(D_6') \cap R(D_8'),$$

$$R(D_3') \cap R(D_7') = R(D_9'), R(D_4') \cap R(D_6') = R(D_4') \cap R(D_6') \cap R(D_8'),$$

$$R(D_5') \cap R(D_6') = R(D_5') \cap R(D_6') \cap R(D_8'), R(D_4') \cap R(D_8') = R(D_{10}')$$

(3.2.7)

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა:

1) თუ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_4')$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset,$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset.$$

გამომდინარე აქედან გვაქვს, რომ $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1 \cup Z_5 = \check{D}$ და $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq \check{D} \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset$. მაგრამ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_4) = \emptyset$.

ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი ტოლობები:

$$R(D'_1) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_8) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_6) = \emptyset,$$

$$R(D'_3) \cap R(D'_8) = \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_7) = \emptyset, R(D'_6) \cap R(D'_7) = \emptyset, R(D'_7) \cap R(D'_8) = \emptyset.$$

2) თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_5)$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset,$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset.$$

გამომდინარე აქედან გვაქვს, რომ $Y_T^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$. მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_5) = \emptyset$.

ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი ტოლობები:

$$R(D'_2) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_7) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_8) = \emptyset,$$

$$R(D'_3) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_5) = \emptyset.$$

3) თუ $\alpha \in R(D'_3) \cap R(D'_7)$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \quad (3.2.8)$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset.$$

გამომდინარე აქედან გვაქვს, რომ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \quad (3.2.9)$$

ე.ი., $\alpha \in R(D'_9)$. ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ჩართვა $R(D'_3) \cap R(D'_7) \subseteq R(D'_9)$.

მეორეს მხრივ, თუ $\alpha \in R(D'_9)$, მაშინ (3.2.9) და (3.2.8) პირობები სამართლიანია, ე.ი., $\alpha \in R(D'_3) \cap R(D'_7)$ და $R(D'_9) \subseteq R(D'_3) \cap R(D'_7)$.

ამიტომ შესრულებულია ტოლობა: $R(D'_9) = R(D'_3) \cap R(D'_7)$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_{10}) = R(D'_4) \cap R(D'_8).$$

4) თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2) \cap R(D'_3)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

გამომდინარე აქედან გვაქვს, რომ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset \quad (3.2.11)$$

ე.ი., $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$. ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ჩართვა

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) \cap R(D'_3) \subseteq R(D'_1) \cap R(D'_2)$$

მეორეს მხრივ, თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ (3.2.11) და (3.2.10) პირობები

სამართლიანია, ე.ი., $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2) \cap R(D'_3)$ და

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) \subseteq R(D'_1) \cap R(D'_2) \cap R(D'_3).$$

ამიტომ შესრულებულია ტოლობა: $R(D'_1) \cap R(D'_2) \cap R(D'_3) = R(D'_1) \cap R(D'_2)$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_7) = R(D'_1) \cap R(D'_3) \cap R(D'_7),$$

$$R(D'_2) \cap R(D'_6) = R(D'_2) \cap R(D'_4) \cap R(D'_6) = R(D'_2) \cap R(D'_6) \cap R(D'_8),$$

$$R(D'_4) \cap R(D'_6) = R(D'_4) \cap R(D'_6) \cap R(D'_8), R(D'_5) \cap R(D'_6) = R(D'_5) \cap R(D'_6) \cap R(D'_8).$$

მივიღეთ, რომ (3.2.7) პირობები ყველა სამართლიანია.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.2.6) და (3.2.7) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} |R^*(Q_3)| = & |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| + |R(D'_4)| + |R(D'_5)| + |R(D'_6)| + |R(D'_7)| + |R(D'_8)| - \\ & - |R(D'_9)| - |R(D'_{10})| - |R(D'_1) \cap R(D'_3)| - |R(D'_2) \cap R(D'_3)| - |R(D'_2) \cap R(D'_4)| - \\ & - |R(D'_5) \cap R(D'_7)| - |R(D'_5) \cap R(D'_8)| - |R(D'_6) \cap R(D'_8)|. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.5. ვთქვათ $D = \{Y, Y', \bar{D}\}$, $D'' = \{Y_1, Y_1', \bar{D}\}$, სადაც $Y, Y', Y_1, Y_1' \in D$, $Y_1 \supseteq Y$ და $Y_1' \supseteq Y'$.

თუ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$ რომელიც $T, T' \in D$, $T \subset T' \subset \bar{D}$ და $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ მაშინ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_T^\alpha \supseteq Y_1, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1', Y_T^\alpha \cap Y' \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset.$$

დამტკიცება: თუ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$, მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 3) პირობის თანახმად გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \supseteq Y, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y', Y_T^\alpha \cap Y' \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset; \\ Y_T^\alpha \supseteq Y_1, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1', Y_T^\alpha \cap Y_1' \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

ბოლო პირობებიდან მივიღებთ

$$Y_T^\alpha \supseteq Y_1, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1', Y_T^\alpha \cap Y' \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset \quad (3.2.13)$$

რადგანაც დაშვების თანახმად $Y_1 \supseteq Y$ და $Y_1' \supseteq Y'$.

მეორეს მხრივ, თუ (3.2.13) პირობები სამართლიანია, მაშინ აგრეთვე სამართლიანი იქნება (3.2.12) პირობები, ე.ი., $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.6. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} |R(D'_1) \cap R(D'_3)| &= 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_5|} \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|}, \\ |R(D'_2) \cap R(D'_3)| &= 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|}, \\ |R(D'_2) \cap R(D'_4)| &= 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|}, \\ |R(D'_5) \cap R(D'_7)| &= 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|}, \\ |R(D'_5) \cap R(D'_8)| &= 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|}, \\ |R(D'_6) \cap R(D'_8)| &= 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_3|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|X \setminus \bar{D}|}. \end{aligned}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $D' = \{Y, Y', \bar{D}\}$, $D'' = \{Y_1, Y_1', \bar{D}\}$, $D', D'' \in \{D_1, D_2, \dots, D_8\}$, სადაც $Y_1 \supseteq Y$ და $Y_1' \supseteq Y'$. დავუშვათ, რომ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ და α არის რეგულარული ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, რომელიდაც $T, T' \in D$, $T \subset T' \subset \bar{D}$ და $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$. მაშინ 3.2.1 თეორემის 3) პირობის თანახმად გვექნება:

$$Y_T^\alpha \supseteq Y_1, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1', Y_T^\alpha \cap Y' \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset \quad (3.2.14)$$

ვთქვათ f_α არის X სიმრავლის D ნახევარმესერში ისეთი ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $f_\alpha(t) = t\alpha$ ნებისმიერი $t \in X$ ელემენტისათვის, $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$ და $f_{3\alpha}$ სიმბოლოებით აღნიშნულია f_α ასახვის შეზღუდვები შესაბამისად Y_1 , $Y_1' \setminus Y_1$, $\bar{D} \setminus Y_1'$, $X \setminus \bar{D}$ სიმრავლეებზე. შევნიშნოთ, რომ $\{Y_1, Y_1' \setminus Y_1, \bar{D} \setminus Y_1', X \setminus \bar{D}\}$ სიმრავლის ელემენტები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $Y_1 \cup (Y_1' \setminus Y_1) \cup (\bar{D} \setminus Y_1') \cup (X \setminus \bar{D}) = X$.

შევისწავლოთ $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$ და $f_{3\alpha}$ ასახვათა თვისებები.

1) $t \in Y_1$, მაშინ (3.2.14) ჩართვების თანახმად $Y_1 \subseteq Y_T^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_T^\alpha$ და Y_T^α სიმრავლის განმარტების თანახმად $t\alpha = T$. ამიტომ $f_{0\alpha}(t) = T$ ნებისმიერი $t \in Y_1$ -ელემენტისათვის.

2) $t \in Y_1' \setminus Y_1$, მაშინ (3.2.14) ჩართვების თანახმად $Y_1' \setminus Y_1 \subseteq Y_1' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ და Y_T^α და $Y_{T'}^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად $t\alpha \in \{T, T'\}$. ამიტომ $f_{1\alpha}(t) \in \{T, T'\}$ ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Y_1$ -ელემენტისათვის.

მეორეს მხრივ, $Y_T^\alpha \cap Y' \neq \emptyset$, ე.ი., $t'\alpha = T'$, რომელიდაც $t' \in Y'$. თუ $t' \in Y_1$, მაშინ $t' \in Y_1 \subseteq Y_T^\alpha$. ამიტომ $t'\alpha = T$. მაგრამ ზოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t'\alpha = T'$, რადგანაც D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $T \neq T'$. ამიტომ $f_{1\alpha}(t') = T'$ რომელიდაც $t' \in Y' \setminus Y_1$.

3) $t \in \bar{D} \setminus Y_1'$, მაშინ (3.2.14) ჩართვების თანახმად $\bar{D} \setminus Y_1' \subseteq \bar{D} \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_0^\alpha = X$, ე.ი., $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_0^\alpha$ და Y_T^α , $Y_{T'}^\alpha$ და Y_0^α სიმრავლეების განმარტების თანახმად $t\alpha \in \{T, T', \bar{D}\}$. ამიტომ $f_{3\alpha}(t) \in \{T, T', \bar{D}\}$ ნებისმიერი $t \in \bar{D} \setminus Y_1'$ -ელემენტისათვის.

მეორეს მხრივ, $Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$, ე.ი., $t''\alpha = \check{D}$ რომელიდაც $t'' \in \check{D}$. თუ $t'' \in Y_1'$, მაშინ $t'' \in Y_1' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$. ამიტომ Y_T^α და $Y_{T'}^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად $t''\alpha \in \{T, T'\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t''\alpha = \check{D}$ ტოლობას. ამიტომ $f_{3\alpha}(t'') = \check{D}$, რომელიდაც $t'' \in \check{D} \setminus Y_1'$ -ელემენტისათვის.

4) $t \in X \setminus \check{D}$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენისა და (3.2.14) პირობების თანახმად გვექნება: $t \in X \setminus \check{D} \subseteq X = Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_0^\alpha$, ე.ი., $t\alpha \in \{T, T', \check{D}\}$ Y_T^α , $Y_{T'}^\alpha$ და Y_0^α სიმრავლეების განმარტების თანახმად. ამიტომ $f_{4\alpha}(t) \in \{T, T', \check{D}\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus \check{D}$ -ელემენტისათვის.

ამრიგად, ყოველი $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარული მიმართებისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ დალაგებული სისტემა. ცხადია, რომ განსხვავებულ ბინარულ მიმართებებს ეთანადება $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სახის განსხვავებული სისტემები.

ახლა ვთქვათ $f_0: Y_1 \rightarrow \{T\}$, $f_1: Y_1' \setminus Y_1 \rightarrow \{T, T'\}$, $f_2: \check{D} \setminus Y_1' \rightarrow \{T, T', \check{D}\}$, $f_3: X \setminus \check{D} \rightarrow \{T, T', \check{D}\}$ არიან ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

- 5) $f_0(t) = T$ ნებისმიერი $t \in Y_1$;
- 6) $f_1(t) \in \{T, T'\}$ ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Y_1$ და $f_1(t') = T'$ რომელიდაც $t' \in Y_1' \setminus Y_1$;
- 7) $f_2(t) \in \{T, T', \check{D}\}$ ნებისმიერი $t \in \check{D} \setminus Y_1'$ და $f_2(t'') = \check{D}$ რომელიდაც $t'' \in \check{D} \setminus Y_1'$;
- 8) $f_3(t) \in \{T, T', \check{D}\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus \check{D}$.

ახლა განვმარტოთ $f: X \rightarrow D$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in Y_1, \\ f_1(t), & t \in Y_1' \setminus Y_1, \\ f_2(t), & t \in \check{D} \setminus Y_1', \\ f_3(t), & t \in X \setminus \check{D}. \end{cases}$$

ვთქვათ $\beta = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$, $Y_T^\beta = \{t \mid t\beta = T\}$, $Y_{T'}^\beta = \{t \mid t\beta = T'\}$ და $Y_{\check{D}}^\beta = \{t \mid t\beta = \check{D}\}$,

მაშინ β ბინარული მიმართება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით

$$\beta = (Y_T^\beta \times T) \cup (Y_{T'}^\beta \times T') \cup (Y_0^\beta \times \bar{D})$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_T^\beta \supseteq Y_1, Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta \supseteq Y_1', Y_{T'}^\beta \cap Y' \neq \emptyset, Y_0^\beta \cap \bar{D} \neq \emptyset$$

(დაშვების თანახმად $f_1(t') = T'$ რომელიდაც $t' \in Y' \setminus Y_1$ და $f_2(t'') = \bar{D}$ რომელიდაც $t'' \in \bar{D} \setminus Y_1'$), ე.ი., ლემა 3.2.5-ის თანახმად $\beta \in R(D') \cap R(D'')$.

გამომდინარე აქედან ყოველი $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარული მიმართება და $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ ასახვათა სისტემები ერთადერთია.

თეორემა 2.1.1-ის თანახმად $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}$ ასახვათა რაოდენობა შესაბამისად იქნება:

$$1, 2^{|Y_1' \setminus (Y' \cup Y_1)|}, (2^{|Y' \setminus Y_1|} - 1), (3^{|D \setminus Y_1|} - 2^{|D \setminus Y_1|}), 3^{|X \setminus D|}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $2^{|Y_1' \setminus (Y' \cup Y_1)|} \cdot (2^{|Y' \setminus Y_1|} - 1) \cdot (3^{|D \setminus Y_1|} - 2^{|D \setminus Y_1|}) \cdot 3^{|X \setminus D|}$ რიცხვი არ არის დამოკიდებული D ნახევარმესერის $T \subset T' \subset T''$ ($T, T', T'' \in D$) ჯაჭვის არჩევაზე. რადგანაც D ნახევარმესერის ყველა განსხვავებული სამედიანტიანი ჯაჭვის რაოდენობა ტოლია 18-ის, ამიტომ $R(D') \cap R(D'')$ სიმრავლის ყველა რეგულარული ელემენტების რაოდენობა ნებისმიერი $T, T', T'' \in D$ -თვის, სადაც $T \subset T' \subset T''$ ტოლი იქნება

$$|R(D') \cap R(D'')| = 18 \cdot 2^{|Y_1' \setminus (Y' \cup Y_1)|} \cdot (2^{|Y' \setminus Y_1|} - 1) \cdot (3^{|D \setminus Y_1|} - 2^{|D \setminus Y_1|}) \cdot 3^{|X \setminus D|}.$$

გავითვალისწინებთ რა მიღებულ ფორმულაში შესაბამის ნახევარმესერებს, მივიღებთ ლემა 3.2.6 სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.7. ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა, $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ $R^*(Q_3)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 3) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}
|R^*(Q_3)| = & 18 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_5|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_5|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + 18 \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + \\
& + 18 \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + 18 \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + \\
& + 18 \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + 18 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_3|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + \\
& + 18 \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + 18 \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - \\
& - 18 \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - 18 \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_5|} \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - \\
& - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} - 18 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_3|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 3^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|}.
\end{aligned}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_3)| = 18$, ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 3.1.17-ის

3) პირობას, აგრეთვე ლემა 3.2.4-ს და ლემა 3.2.6-ს, მივიღებთ ლემა 3.2.7-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

4. ახლა ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 4) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად ჩვენ გვაქვს:

$$\begin{aligned}
Q_4 \mathcal{G}_{XI} = & \{ \{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \\
& \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\} \}.
\end{aligned}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned}
D'_1 = & \{Z_7, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\} \\
D'_4 = & \{Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_5 = \{Z_6, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, D'_6 = \{Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}
\end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_4) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \cup R(D'_5) \cup R(D'_6) \quad (3.2.15)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.2.8. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_4)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა რეგულარული ელემენტების

სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 4) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}
 |R^*(Q_4)| &= 6 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_5|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 &+ 6 \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 &+ 6 \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 &+ 6 \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 &+ 6 \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 &+ 6 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_6|} - 1) \cdot (3^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_3|}) \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|}.
 \end{aligned}$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$\begin{aligned}
 R(D'_1) \cap R(D'_2) &= \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_3) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_4) = \emptyset, \\
 R(D'_1) \cap R(D'_5) &= \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_3) = \emptyset, \\
 R(D'_2) \cap R(D'_4) &= \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_6) = \emptyset, \\
 R(D'_3) \cap R(D'_4) &= \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_6) = \emptyset, \\
 R(D'_4) \cap R(D'_5) &= \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_5) \cap R(D'_6) = \emptyset.
 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) ვთქვათ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$ და α რეგულარული ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$ რომელიც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$ და $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \neq \{\emptyset\}$, მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 4) პირობის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned}
 Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_2, \\
 Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 &\neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset; \\
 Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_2, \\
 Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset;
 \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cup Z_4 = Z_2$ და $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_2 \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset$. მაგრამ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამრიგად, $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობებიც:

$$\begin{aligned} R(D'_1) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_5) = \emptyset, \\ R(D'_3) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_5) \cap R(D'_6) = \emptyset. \end{aligned}$$

2) ვთქვათ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_3)$ და α რეგულარული ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$ რომელიც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$ და $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \neq \{\emptyset\}$. მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 4) პირობის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_2, \\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset; \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1, \\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1 \cup Z_2 = \check{D}$ და $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha) \cap Y_0^\alpha \supseteq \check{D} \cap Y_0^\alpha \neq \emptyset$. მაგრამ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha) \cap Y_0^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამრიგად, $R(D'_1) \cap R(D'_3) = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობებიც:

$$\begin{aligned} R(D'_1) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_3) = \emptyset, \\ R(D'_2) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_4) = \emptyset, \\ R(D'_4) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_6) = \emptyset. \end{aligned}$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.2.15) და (3.2.16) პირობებს, მივიღებთ რომ

$$|R^*(Q_4)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| + |R(D'_4)| + |R(D'_5)| + |R(D'_6)|.$$

ბოლო ფორმულიდან მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|\Omega(Q_4)| = 6$ და თეორემა 3.1.17-ის 4) პირობას.

ლემა დამტკიცებულია.

5. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 5) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად ჩვენ გვაქვს:

$$Q_5 \mathfrak{D}_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\} \right. \\ \left. \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_1, Z_2, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_7, Z_5, Z_1, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_7, Z_1, Z_5, \bar{D}\}, \\ D'_5 = \{Z_6, Z_3, Z_2, \bar{D}\}, D'_6 = \{Z_6, Z_2, Z_3, \bar{D}\}, D'_7 = \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2\}, D'_8 = \{Z_7, Z_4, Z_5, Z_2\}, \\ D'_9 = \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, D'_{10} = \{Z_6, Z_3, Z_4, Z_1\}, D'_{11} = \{Z_6, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_{12} = \{Z_6, Z_1, Z_2, \bar{D}\}, \\ D'_{13} = \{Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_{14} = \{Z_4, Z_1, Z_2, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_5) = \bigcup_{i=1}^{14} R(D'_i) \quad (3.2.17)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 5.1.9. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_5)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 5) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned} |R^*(Q_5)| = & |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| + |R(D'_4)| + |R(D'_5)| + |R(D'_6)| + |R(D'_7)| + \\ & + |R(D'_8)| + |R(D'_9)| + |R(D'_{10})| - |R(D'_1) \cap R(D'_3)| - |R(D'_1) \cap R(D'_6)| - \\ & - |R(D'_2) \cap R(D'_4)| - |R(D'_2) \cap R(D'_5)| - |R(D'_3) \cap R(D'_7)| - \\ & - |R(D'_4) \cap R(D'_8)| - |R(D'_5) \cap R(D'_{10})| - |R(D'_6) \cap R(D'_9)|. \end{aligned}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\bar{D} = \{Z, Z', Z'', Z' \cup Z''\}$ არის $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_{14}\}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი და $\alpha \in R(D')$, მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე:

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')),$$

სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$ და თეორემა 3.2.1-ის 5) პირობის თანახმად აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z', Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z'', Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z'' \neq \emptyset.$$

გამომდინარე აქედან ადგილი აქვს ტოლობებს: $R(D'_1) = R(D'_{11}) = R(D'_{13})$,

$R(D'_2) = R(D'_{12}) = R(D'_{14})$. ამიტომ (3.2.17)-დან გვაქვს, რომ

$$R^*(Q_5) = \bigcup_{i=1}^{10} R(D'_i) \quad (3.2.18)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} R(D'_1) \cap R(D'_2) &= \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_7) = \emptyset, \\ R(D'_1) \cap R(D'_8) &= \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_3) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_6) = \emptyset, \\ R(D'_2) \cap R(D'_7) &= \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_9) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_4) = \emptyset, \\ R(D'_3) \cap R(D'_5) &= \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_8) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_6) = \emptyset, \\ R(D'_4) \cap R(D'_7) &= \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_9) = \emptyset, R(D'_5) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_5) \cap R(D'_7) = \emptyset, \\ R(D'_5) \cap R(D'_9) &= \emptyset, R(D'_6) \cap R(D'_8) = \emptyset, R(D'_6) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_7) \cap R(D'_8) = \emptyset, \\ R(D'_7) \cap R(D'_9) &= \emptyset, R(D'_7) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_8) \cap R(D'_9) = \emptyset, R(D'_8) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, \\ R(D'_9) \cap R(D'_{10}) &= \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_9) = R(D'_1) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9), \\ R(D'_2) \cap R(D'_8) &= R(D'_2) \cap R(D'_4) \cap R(D'_8), R(D'_3) \cap R(D'_6) = R(D'_1) \cap R(D'_3) \cap R(D'_6), \\ R(D'_3) \cap R(D'_9) &= R(D'_1) \cap R(D'_3) \cap R(D'_9) = \\ &= R(D'_1) \cap R(D'_3) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9) = R(D'_3) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9), \\ R(D'_4) \cap R(D'_5) &= R(D'_2) \cap R(D'_4) \cap R(D'_5), R(D'_4) \cap R(D'_{10}) = R(D'_4) \cap R(D'_5) \cap R(D'_{10}), \\ R(D'_5) \cap R(D'_8) &= R(D'_2) \cap R(D'_5) \cap R(D'_8) = \\ &= R(D'_4) \cap R(D'_5) \cap R(D'_8) = R(D'_2) \cap R(D'_4) \cap R(D'_5) \cap R(D'_8), \\ R(D'_6) \cap R(D'_7) &= R(D'_3) \cap R(D'_6) \cap R(D'_7). \end{aligned}$$

(3.2.19)

1) ვთქვათ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ $B_x(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე:

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')),$$

სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$ და თეორემა 3.2.1-ის 5)

პირობის თანახმად აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset,$$

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$$

მოცემული პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1 \cup Z_2 = \check{D}$, მაშინ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq \check{D} \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1 \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset$, მაგრამ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap Y_{T''}^\alpha = \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$R(D'_1) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_5) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_3) = \emptyset,$$

$$R(D'_2) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_7) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_5) = \emptyset,$$

$$R(D'_3) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_7) = \emptyset, R(D'_4) \cap R(D'_9) = \emptyset,$$

$$R(D'_5) \cap R(D'_6) = \emptyset, R(D'_5) \cap R(D'_7) = \emptyset, R(D'_6) \cap R(D'_8) = \emptyset, R(D'_7) \cap R(D'_{10}) = \emptyset,$$

$$R(D'_8) \cap R(D'_9) = \emptyset.$$

2) ახლა თქვათ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_7)$, მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე:

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')),$$

სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$ და თეორემა 3.2.1-ის 5)

პირობის თანახმად აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset,$$

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_4, Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset.$$

მოცემული პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cup Z_2 = Z_2$, მაშინ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_2 \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset$, მაგრამ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap Y_{T''}^\alpha = \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_7) = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$R(D'_1) \cap R(D'_8) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_9) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_8) = \emptyset,$$

$$R(D'_5) \cap R(D'_9) = \emptyset, R(D'_6) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_7) \cap R(D'_8) = \emptyset, R(D'_7) \cap R(D'_9) = \emptyset,$$

$$R(D'_8) \cap R(D'_{10}) = \emptyset, R(D'_9) \cap R(D'_{10}) = \emptyset.$$

3) თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9)$, მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 5) პირობის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha &\supseteq Z_2, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha &\supseteq Z_2, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_3, Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha &\supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_3, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

ამ პირობებიდან ჩანს, რომ

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, \quad (3.2.21)$$

ე.ი., $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_9)$. ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) \cap R(D'_3) \subseteq R(D'_1) \cap R(D'_2)$$

მეორეს მხრივ, თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_9)$, მაშინ (3.2.21) და (3.2.20) პირობები სამართლიანია, ე.ი., $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9)$ და გამომდინარე აქედან $R(D'_1) \cap R(D'_9) \subseteq R(D'_1) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9)$. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_9) = R(D'_1) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9)$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_2) \cap R(D'_8) = R(D'_2) \cap R(D'_4) \cap R(D'_8), \quad R(D'_3) \cap R(D'_6) = R(D'_1) \cap R(D'_3) \cap R(D'_6),$$

$$\begin{aligned} R(D'_3) \cap R(D'_9) &= R(D'_1) \cap R(D'_3) \cap R(D'_9) = \\ &= R(D'_1) \cap R(D'_3) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9) = R(D'_3) \cap R(D'_6) \cap R(D'_9), \end{aligned}$$

$$R(D'_4) \cap R(D'_5) = R(D'_2) \cap R(D'_4) \cap R(D'_5), \quad R(D'_4) \cap R(D'_{10}) = R(D'_4) \cap R(D'_5) \cap R(D'_{10}),$$

$$\begin{aligned} R(D'_5) \cap R(D'_8) &= R(D'_2) \cap R(D'_5) \cap R(D'_8) = \\ &= R(D'_4) \cap R(D'_5) \cap R(D'_8) = R(D'_2) \cap R(D'_4) \cap R(D'_5) \cap R(D'_8), \end{aligned}$$

$$R(D'_6) \cap R(D'_7) = R(D'_3) \cap R(D'_6) \cap R(D'_7).$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.2.18) და (3.2.19) პირობებს მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} |R^*(Q_5)| &= |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| + |R(D'_4)| + |R(D'_5)| + |R(D'_6)| + |R(D'_7)| + \\ &\quad + |R(D'_8)| + |R(D'_9)| + |R(D'_{10})| - |R(D'_1) \cap R(D'_3)| - |R(D'_1) \cap R(D'_6)| - \\ &\quad - |R(D'_2) \cap R(D'_4)| - |R(D'_2) \cap R(D'_5)| - |R(D'_3) \cap R(D'_7)| - \\ &\quad - |R(D'_4) \cap R(D'_8)| - |R(D'_5) \cap R(D'_{10})| - |R(D'_6) \cap R(D'_9)|. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.10. ვთქვათ $D' = \{\tilde{Z}, Z, Z', Z \cup Z'\}$ და $D'' = \{\tilde{Y}, Y, Y', Y \cup Y'\}$ ელემენტები არიან $\{D'_1, D'_2, D'_3, D'_4, D'_5, D'_6, D'_7, D'_8, D'_9, D'_{10}\}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები, სადაც $D' \neq D''$, $Z \supseteq Y$ და $Z' \supseteq Y'$. თუ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')),$$

რომელიდან $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$ და $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$, მაშინ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z', Y_{T'}^\alpha \cap Y \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Y' \neq \emptyset.$$

დამტკიცება: თუ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$, მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 5) პირობის თანახმად გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z', Y_{T'}^\alpha \cap Z \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset; \\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Y', Y_{T'}^\alpha \cap Y \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Y' \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

ამ ბოლო ჩართვებიდან მივიღებთ

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z', Y_{T'}^\alpha \cap Y \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap Y' \neq \emptyset, \quad (3.2.23)$$

რადგანაც დაშვების თანახმად $Z \supseteq Y$ და $Z' \supseteq Y'$.

მეორეს მხრივ, თუ (3.2.23) ჩართვები სამართლიანია, მაშინ ასევე სამართლიანი იქნება (3.2.22) პირობები, ე.ი., $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 5.1.11. ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა, $D' = \{\tilde{Z}, Z, Z', Z \cup Z'\}$ და $D'' = \{\tilde{Y}, Y, Y', Y \cup Y'\}$ ელემენტები არიან $\{D'_1, D'_2, D'_3, D'_4, D'_5, D'_6, D'_7, D'_8, D'_9, D'_{10}\}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები, სადაც $D' \neq D''$, $Z \supseteq Y$ და $Z' \supseteq Y'$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} |R(D'_1) \cap R(D'_3)| &= 7 \cdot 2^{|Z_2 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 2^{|Z_1 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} \\ |R(D'_1) \cap R(D'_6)| &= 7 \cdot 2^{|Z_2 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 2^{|Z_1 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} \\ |R(D'_2) \cap R(D'_4)| &= 7 \cdot 2^{|Z_1 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 2^{|Z_2 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|R(D'_2) \cap R(D'_5)| &= 7 \cdot 2^{|Z_1 \setminus D|} \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 2^{|Z_2 \setminus D|} \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus D|} \\
|R(D'_3) \cap R(D'_7)| &= 7 \cdot 2^{|Z_5 \setminus D|} \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_2|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus D|} \\
|R(D'_4) \cap R(D'_8)| &= 7 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_2|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot 2^{|Z_5 \setminus D|} \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus D|} \\
|R(D'_5) \cap R(D'_{10})| &= 7 \cdot 2^{|Z_3 \setminus D|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_1|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus D|} \\
|R(D'_6) \cap R(D'_9)| &= 7 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_1|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot 2^{|Z_3 \setminus D|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus D|}
\end{aligned}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $D' = \{\tilde{Z}, Z, Z', Z \cup Z'\}$ და $D'' = \{\tilde{Y}, Y, Y', Y \cup Y'\}$ ელემენტები არიან $\{D'_1, D'_2, D'_3, D'_4, D'_5, D'_6, D'_7, D'_8, D'_9, D'_{10}\}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები, სადაც $D' \neq D''$, $Z \supseteq Y$ და $Z' \supseteq Y'$. თუ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$, მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$$

რომელიც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$, მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 5) პირობის თანახმად გვაქვს, რომ

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z', Y_{T'}^\alpha \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset, Y_{T'}^\alpha \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset \quad (3.2.24)$$

ვთქვათ f_α არის X სიმრავლის D ნახევარმესერში ისეთი ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $f_\alpha(t) = t\alpha$ ნებისმიერი $t \in X$ ელემენტისათვის, $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}$ და $f_{3\alpha}$ სიმბოლოებით აღნიშნულია f_α ასახვის შეზღუდვები შესაბამისად $Z \cap Z'$, $Z \setminus Z'$, $Z' \setminus Z$, $X \setminus (Z \cup Z')$ სიმრავლეებზე. შევნიშნოთ, რომ $\{Z \cap Z', Z \setminus Z', Z' \setminus Z, X \setminus (Z \cup Z')\}$ სიმრავლის ელემენტები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $(Z \cap Z') \cup (Z \setminus Z') \cup (Z' \setminus Z) \cup (X \setminus (Z \cup Z')) = X$.

შევსწავლოთ $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}$ და $f_{3\alpha}$ ასახვათა თვისებები.

1) $t \in Z \cap Z'$, მაშინ (3.2.24) ჩართვების თანახმად $Z \cap Z' \subseteq (Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) \cap (Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha) = Y_T^\alpha$, რადგანაც $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z$ და $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z'$, ე.ი., $t \in Y_T^\alpha$ და Y_T^α სიმრავლის განმარტების თანახმად $t\alpha = T$. ამიტომ $f_{0\alpha}(t) = T$ ნებისმიერი $t \in Z \cap Z'$ -ელემენტისათვის.

2) $t \in Z \setminus Z'$, მაშინ (3.2.24) ჩართვების თანახმად $Z \setminus Z' \subseteq Z \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$

და Y_T^α და $Y_{T'}^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $t\alpha \in \{T, T'\}$. ამიტომ $f_{1\alpha}(t) \in \{T, T'\}$ ნებისმიერი $t \in Z \setminus Z'$ -ელემენტისათვის.

მეორეს მხრივ, დაშვების თანახმად გვაქვს $Y_{T'}^\alpha \cap Y \neq \emptyset$, ე.ი., $t'\alpha = T'$ რომელიღაც $t' \in Y$, მაშინ $t' \in Z$ რადგანაც $Y \subseteq Z$. თუ $t' \in Z'$, მაშინ $t' \in Z' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha$, ამიტომ $t'\alpha \in \{T, T''\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t'\alpha = T'$, რადგანაც D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $T' \neq T$ და $T' \neq T''$. ამიტომ $f_{1\alpha}(t') = T'$ რომელიღაც $t' \in Y \setminus Z'$ -ელემენტისათვის.

3) $t \in Z' \setminus Z$, მაშინ (3.2.24) ჩართვების თანახმად $Z' \setminus Z \subseteq Z' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha$, ე.ი., $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha$ და Y_T^α და $Y_{T''}^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად $t\alpha \in \{T, T''\}$. ამიტომ $f_{2\alpha}(t) \in \{T, T''\}$ ნებისმიერი $t \in Z' \setminus Z$ -ელემენტისათვის.

მეორეს მხრივ, დაშვების თანახმად გვაქვს $Y_{T''}^\alpha \cap Y' \neq \emptyset$, ე.ი., $t''\alpha = T''$ რომელიღაც $t'' \in Y'$, მაშინ $t'' \in Z'$ რადგანაც $Y' \subseteq Z'$. თუ $t'' \in Z$, მაშინ $t'' \in Z \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, ამიტომ $t''\alpha \in \{T, T'\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t''\alpha = T''$, რადგანაც D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $T \neq T''$ და $T' \neq T''$. ამიტომ $f_{2\alpha}(t'') = T''$ რომელიღაც $t'' \in Y' \setminus Z$ -ელემენტისათვის.

4) $t \in X \setminus (Z \cup Z')$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენისა და (3.2.24) პირობების თანახმად გვექნება: $X \setminus (Z \cup Z') \subseteq X = Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T' \cup T''}^\alpha$, ე.ი., $t\alpha \in \{T, T', T'', T' \cup T''\}$ Y_T^α , $Y_{T'}^\alpha$, $Y_{T''}^\alpha$ და $Y_{T' \cup T''}^\alpha$ სიმრავლეების განმარტების თანახმად. ამიტომ $f_{6\alpha}(t) \in \{T, T', T'', T' \cup T''\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus (Z \cup Z')$ -ელემენტისათვის.

ამრიგად, ყოველი $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარული მიმართებისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ დალაგებული სისტემა. ცხადია, რომ განსხვავებულ ბინარულ მიმართებებს ეთანადება $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სახის განსხვავებული სისტემები.

ახლა ვთქვათ

$$f_0 : Z \cap Z' \rightarrow \{T\}, f_1 : Z \setminus Z' \rightarrow \{T, T'\}, f_2 : Z' \setminus Z \rightarrow \{T, T''\}, f_3 : X \setminus (Z \cup Z') \rightarrow \{T, T', T'', T' \cup T''\}$$

არიან ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

- 5) $f_0(t) = T$ ნებისმიერი $t \in Z \cap Z'$;
- 6) $f_1(t) \in \{T, T'\}$ ნებისმიერი $t \in Z \setminus Z'$ და $f_1(t') = T'$ რომელიღაც $t' \in Y \setminus Z'$;
- 7) $f_2(t) \in \{T, T''\}$ ნებისმიერი $t \in Z' \setminus Z$ და $f_2(t'') = T''$ რომელიღაც $t'' \in Y' \setminus Z$;
- 8) $f_{3\alpha}(t) \in \{T, T', T'', T' \cup T''\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus (Z \cup Z')$.

ახლა განვმარტოთ $f : X \rightarrow D$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in Z \cap Z', \\ f_1(t), & t \in Z \setminus Z', \\ f_2(t), & t \in Z' \setminus Z, \\ f_3(t), & t \in X \setminus (Z \cup Z'). \end{cases}$$

ვთქვათ $\beta = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times f(x)$, $Y_T^\beta = \{t \mid t\beta = T\}$, $Y_{T'}^\beta = \{t \mid t\beta = T'\}$, $Y_{T''}^\beta = \{t \mid t\beta = T''\}$ და

$Y_{T' \cup T''}^\beta = \{t \mid t\beta = T' \cup T''\}$. მაშინ β ბინარული მიმართება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით $\beta = (Y_T^\beta \times T) \cup (Y_{T'}^\beta \times T') \cup (Y_{T''}^\beta \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\beta \times (T' \cup T''))$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta \supseteq Z, Y_T^\beta \cup Y_{T''}^\beta \supseteq Z', Y_{T'}^\beta \cap Y_{T''}^\beta = \emptyset, Y_{T'}^\beta \cap Y_{T''}^\beta = \emptyset$$

(დაშვების თანახმად $f_1(t') = T'$ რომელიღაც $t' \in Z \setminus Y'$ და $f_2(t'') = T''$ რომელიღაც $t'' \in Y' \setminus Z$), ე.ი., ლემა 3.2.10 -ის თანახმად გვაქვს, რომ $\beta \in R(D') \cap R(D'')$.

გამომდინარე აქედან ყოველი $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარული მიმართება და $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ ასახვათა სისტემები ერთადერთია.

თეორემა 2.1.1-ის თანახმად $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}$ ასახვათა რაოდენობა შესაბამისად იქნება:

$$1, 2^{|Z \setminus (Y \cup Z')|} \cdot (2^{|Y \setminus Z|} - 1), 2^{|Z' \setminus (Y' \cup Z)|} \cdot (2^{|Y' \setminus Z|} - 1), 4^{|X \setminus (Z \cup Z')|}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $2^{|Z \setminus (Y \cup Z')|} \cdot (2^{|Y \setminus Z|} - 1) \cdot 2^{|Z' \setminus (Y' \cup Z)|} \cdot (2^{|Y' \setminus Z|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus (Z \cup Z')|}$ რიცხვი არ არის დამოკიდებული D ნახევარმესერის $T, T', T'' \in D$, ელემენტების არჩევაზე, სადაც $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$ და $T'' \setminus T' \neq \emptyset$. რადგანაც D ნახევარმესერის ყველა განსხვავებული

ასეთი ელემენტების რაოდენობა ტოლია 7-ის, ამიტომ $R(D') \cap R(D'')$ სიმრავლის ყველა რეგულარული ელემენტების რაოდენობა ტოლი იქნება

$$|R(D') \cap R(D'')| = 7 \cdot 2^{|Z \setminus (Y \cup Z')|} \cdot (2^{|Y \setminus Z|} - 1) \cdot 2^{|Z' \setminus (Y \cup Z)|} \cdot (2^{|Y \setminus Z|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus (Z \cup Z')|}.$$

გავითვალისწინებთ რა მიღებულ ფორმულაში შესაბამის ნახევარმესერებს, მივიღებთ ლემა 3.2.11 სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.2.12. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_5)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 5) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned} |R^*(Q_5)| = & 14 \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + 14 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ & + 14 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + 14 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \\ & + 14 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} - \\ & - 7 \cdot 2^{|Z_2 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 2^{|Z_1 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} - \\ & - 7 \cdot 2^{|Z_2 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 2^{|Z_1 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} - \\ & - 7 \cdot 2^{|Z_1 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 2^{|Z_2 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} - \\ & - 7 \cdot 2^{|Z_1 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 2^{|Z_2 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} - \\ & - 7 \cdot 2^{|Z_3 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_3|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} - \\ & - 7 \cdot 2^{|Z_1 \setminus Z_2|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot 2^{|Z_5 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} - \\ & - 7 \cdot 2^{|Z_3 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_1|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} - \\ & - 7 \cdot 2^{|Z_2 \setminus Z_1|} \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot 2^{|Z_3 \setminus \bar{D}|} \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_5)| = 7$, ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 3.1.17-ის 5) პირობას, ლემა 3.2.9-ს და ლემა 3.2.11-ს, მივიღებთ, რომ ლემა 3.2.12 სამართლიანია.

ლემა დამტკიცებულია.

6. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 6) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად ჩვენ გვაქვს:

$$Q_6\theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_4, Z_1, Z_2, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_6, Z_4, Z_1, Z_2, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_6) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \quad (3.2.25)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.2.13. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_6)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 6) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned} |R^*(Q_6)| &= 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_4|} \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_4|} \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_4|} \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_4|} \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} R(D'_1) \cap R(D'_2) &= \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_3) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_4) = \emptyset, \\ R(D'_2) \cap R(D'_3) &= \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_4) = \emptyset. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა:

1) ვთქვათ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$ და α რეგულარული ბინარული მიმართების კვაზი-ნორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$ რომელიც $T, Z, Z' \in D$, $T \subset Z_4 \subset Z \subset \bar{D}$, $T \subset Z_4 \subset Z' \subset \bar{D}$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$ და $Y_T^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_{Z'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$, მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 6) პირობის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_1, \\ Y_4^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset, Y_{Z'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_1, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, \\ Y_4^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset, Y_{Z'}^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან გვაქვს, რომ $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_2 \cup Z_1 = \check{D}$ და $(Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha) \cap Y_Z^\alpha \supseteq \check{D} \cap Y_Z^\alpha \supseteq Z_1 \cap Y_Z^\alpha \neq \emptyset$, მაგრამ $(Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha) \cap Y_Z^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D_1') \cap R(D_2') = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $R(D_3') \cap R(D_4') = \emptyset$.

2) ვთქვათ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_3')$ და α რეგულარული ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$ რომელიც $T, Z, Z' \in D$, $T \subset Z_4 \subset Z \subset \check{D}$, $T \subset Z_4 \subset Z' \subset \check{D}$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$ და $Y_T^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_{Z'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$, მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 6) პირობის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_Z^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_1, \\ Y_4^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset, Y_{Z'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_6, Y_Z^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_1, \\ Y_4^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset, Y_{Z'}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან გვაქვს, რომ $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_4^\alpha \supseteq Z_4 \cap Y_4^\alpha \neq \emptyset$. მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_4^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D_1') \cap R(D_3') = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D_1') \cap R(D_4') = \emptyset, R(D_2') \cap R(D_3') = \emptyset, R(D_2') \cap R(D_4') = \emptyset.$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.2.25) და (3.2.26) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_6)| = |R(D_1')| + |R(D_2')| + |R(D_3')| + |R(D_4')|$$

ბოლო ფორმულიდან მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|\Omega(Q_6)| = 2$ და თეორემა 3.1.17-ის 6) პირობას.

ლემა დამტკიცებულია.

7. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 7) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად ჩვენ გვაქვს:

$$Q_7\theta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_4, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_6, Z_3, Z_4, Z_1, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_7) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \quad (3.2.27)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.2.14. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_7)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 7) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned} |R^*(Q_7)| &= 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} R(D'_1) \cap R(D'_2) &= \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_3) = \emptyset, R(D'_1) \cap R(D'_4) = \emptyset, \\ R(D'_2) \cap R(D'_3) &= \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_4) = \emptyset. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა

1) ვთქვათ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_4)$, და α რეგულარული ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$$

რომელიც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset \bar{D}$, $T \subset T'' \subset \bar{D}$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$ და

$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$. მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 7) პირობის თანახმად გვქვს, რომ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_5 \cap Z_4 \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4, \\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_5 &\neq \emptyset, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset. \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_4 \cap Z_3 \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_3, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4, \\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_3 &\neq \emptyset, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \bar{D} \neq \emptyset \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D_1') \cap R(D_4') = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $R(D_2') \cap R(D_3') = \emptyset$.

2) ვთქვათ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ და α რეგულარული ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$$

რომელიც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset \check{D}$, $T \subset T'' \subset \check{D}$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$ და $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$. მაშინ თეორემა 3.2.1-ის 7) პირობის თანახმად გვქვს, რომ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_5 \cap Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_4, \\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_5 &\neq \emptyset, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset. \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_4 \cap Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, \\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset, Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_5 \cup Z_4 = Z_2$ და $(Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha) \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2 \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$, მაგრამ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha) \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D_1') \cap R(D_2') = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$R(D_1') \cap R(D_3') = \emptyset, R(D_2') \cap R(D_4') = \emptyset, R(D_3') \cap R(D_4') = \emptyset.$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.2.27) და (3.2.28) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_7)| = |R(D_1')| + |R(D_2')| + |R(D_3')| + |R(D_4')|$$

ბოლო ფორმულიდან მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|\Omega(Q_7)| = 2$ და თეორემა 3.1.17-ის 7) პირობას.

ლემა დამტკიცებულია.

8. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 8) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად ჩვენ გვაქვს:

$$Q_8 \vartheta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \check{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_8) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.2.29)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.2.15. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_8)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.2.1-ის 8) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned} |R^*(D_8)| &= 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1) \cdot (3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ:

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.2.30)$$

1) ვთქვათ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$ და α რეგულარული ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D}),$$

სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$ და $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$, მაშინ თეორემა

3.2.1-ის 8) პირობის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha &\supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, \\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 &\neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset. \\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha &\supseteq Z_3, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \supseteq Z_1, \\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 &\neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$ და $(Y_T^\alpha \cap Y_4^\alpha) \cap Y_Z^\alpha \supseteq Z_4 \cap Y_T^\alpha \supseteq Z_2 \cap Y_T^\alpha \neq \emptyset$, მაგრამ $(Y_T^\alpha \cap Y_4^\alpha) \cap Y_Z^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.2.29) და (3.2.30) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_8)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|.$$

ბოლო ფორმულიდან მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|\Omega(Q_8)| = 2$ და თეორემა 3.1.17-ის 8) პირობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა და დავუშვათ, რომ

$$r_1 = |R^*(Q_1)| + |R^*(Q_2)| + |R^*(Q_3)| + |R^*(Q_4)| + |R^*(Q_5)| + |R^*(Q_6)| + |R^*(Q_7)| + |R^*(Q_8)|$$

თეორემა 3.2.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D -თი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $|R_D| = r_1$.

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.2.1-დან.

მაგალითი 3.2.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P_0 = \{1\}, P_1 = \{2\}, P_2 = \{3\}, P_3 = \{4\}, P_4 = \{\emptyset\}, P_5 = \{5\}, P_6 = \{\emptyset\}, P_7 = \{\emptyset\},$$

მაშინ $\bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_1 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Z_2 = \{1, 2, 4, 5\}$, $Z_3 = \{1, 3, 5\}$, $Z_4 = \{1, 4, 5\}$, $Z_5 = \{1, 2, 4\}$, $Z_6 = \{1, 5\}$, $Z_7 = \{1, 4\}$ და

$$D = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

ამიტომ გვაქვს, რომ

$$Z_7 \cap Z_6 = \{1, 4\} \cap \{1, 5\} = \{1\} \neq \emptyset$$

სადაც $|R^*(Q_1)| = 8$, $|R^*(Q_2)| = 209$, $|R^*(Q_3)| = 324$, $|R^*(Q_4)| = 36$, $|R^*(Q_5)| = 126$, $|R^*(Q_6)| = 8$, $|R^*(Q_7)| = 8$, $|R^*(Q_8)| = 4$, $|R_D| = 723$ (იხ. დანართი 2).

ამ შემთხვევაში ანუ როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$, $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფს (იხ. [114]).

3.3. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$

და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 3.3.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული α -იზომორფიზმი $V(D, \alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \bar{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cap T''}^\alpha \times (T' \cap T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \cap T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T'$, $Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$;

10) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T)$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1, \check{D}\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$;

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.2-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-12 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები

წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.3-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.5-დან, 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.8-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.4-დან და 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.7-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

1)-8) შემთხვევა განხილულია წინა პარაგრაფში, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. ახლა განვიხილოთ დანარჩენი შემთხვევები.

9. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.3.1-ის 9) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_9 \vartheta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_4\}\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4\}$, $D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_9) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.3.1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.3.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_9)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.3.1-ის 9) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.3.2)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6,$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.3.1) და (3.3.2) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.3.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_9)| = 1$, ამიტომ ლემა 3.3.1-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 9) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_9)| = 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

10. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.3.1-ის 10) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{10} \mathcal{G}_X = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \\ D'_4 &= \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_2\}, D'_5 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_6 = \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_1\}, \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{10}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \cup R(D'_5) \cup R(D'_6) \quad (3.3.3)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.3.3. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{10})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$

ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.3.1-ის 10) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{10})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T)$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1, \check{D}\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.3.1-ის 10) პირობის თანახმად გვექნება: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $Z_7 \supseteq Z_7$, $Z_6 \supseteq Z_6$ და $\check{D} \supseteq Z_2$, ამიტომ

$$Y_7^\alpha \supseteq Z_7, Y_6^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$$

ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$. გამომდინარე აქედან

$$R(D'_4) \subseteq R(D'_2), R(D'_5) \subseteq R(D'_1), R(D'_6) \subseteq R(D'_2)$$

ამიტომ (3.3.3) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$R^*(Q_{10}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.3.4)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.3.5)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_7^\alpha \supseteq Z_7, Y_6^\alpha \supseteq Z_6, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \\ Y_7^\alpha \supseteq Z_6, Y_6^\alpha \supseteq Z_7, Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_T^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_7^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_6^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_7^\alpha \cap Y_6^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_7^\alpha \cap Y_6^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.3.4) და (3.3.5) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{10})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.3.4. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R(Q_{10})| = 6 \cdot \left(4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|\bar{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{10})| = 3$, ამიტომ ლემა 3.3.3-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 10) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R(Q_{10})| = 6 \cdot \left(4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|\bar{D}|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

11. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.3.1-ის 11) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{11} \mathcal{G}_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, & D'_2 &= \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_2, \bar{D}\}, \\ D'_3 &= \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, & D'_4 &= \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_1, \bar{D}\}, \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{11}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \quad (3.3.6)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.3.5. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{11})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.3.1-ის 11) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{11})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| + |R(D'_4)|$$

დამტკიცება: პირველ რიგში უნდა ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი თანაკვეთები ცარიელია:

$$\begin{aligned} R(D'_1) \cap R(D'_2) &= \emptyset, & R(D'_1) \cap R(D'_3) &= \emptyset, & R(D'_1) \cap R(D'_4) &= \emptyset, \\ R(D'_2) \cap R(D'_3) &= \emptyset, & R(D'_2) \cap R(D'_4) &= \emptyset, & R(D'_3) \cap R(D'_4) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა:

1) თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset,$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_4) = \emptyset, R(D'_2) \cap R(D'_3) = \emptyset, R(D'_3) \cap R(D'_4) = \emptyset.$$

2) თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_3)$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset,$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_1, Y_Z^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2 \cup Z_1 = \check{D}$ და $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha) \cap Y_0^\alpha \supseteq \check{D} \cap Y_0^\alpha \neq \emptyset$, მაგრამ $(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha) \cap Y_0^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_3) = \emptyset$.

ანალოგიური გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $R(D'_2) \cap R(D'_4) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.3.6) და (3.3.7) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{11})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)| + |R(D'_3)| + |R(D'_4)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.3.6. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$,

$Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{11})| = 4 \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\check{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\check{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \check{D}|} +$$

$$+ 4 \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\check{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\check{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \check{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{11})| = 2$, ამიტომ ლემა 3.3.5-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 11)

პირობის თანახმად მივიღებთ ლემა 3.3.6-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

12) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.3.1-ის 12) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{12} \mathcal{D}_X = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \right\}.$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ სამართლიანია, მაშინ $R^*(Q_{12}) = R(D'_1)$ (იხ. განმარტება 3.1.4) და

$$|R^*(Q_{12})| = |R(D'_1)| \quad (3.3.8)$$

ლემა 3.3.7. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{12})| = 4 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: როგორც ცნობილია $|\Phi(Q_{12}, Q_{12})| = 4$ (იხ. ლემა 2.8.1) და $|\Omega(Q_{12})| = 1$, მაშინ (3.3.8) პირობისა და თეორემა 3.1.17-ის 12) პირობის თანახმად მივიღებთ ლემა 3.3.7-ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა. დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} r_2 &= |R^*(Q_9)| + |R^*(Q_{10})| + |R^*(Q_{11})| + |R^*(Q_{12})| = \\ &= 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|} + 6 \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + 4 \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 4 \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + 4 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

თეორემა 3.3.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D -თი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $|R_D| = r_1 + r_2$.

დამტკიცება: მოცემული თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.3.1-დან.

მაგალითი 3.3.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$P_0 = \{\emptyset\}, P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_4 = \{\emptyset\}, P_5 = \{4\}, P_6 = \{5\}, P_7 = \{6\},$$

მაშინ $\bar{D}=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Z_1=\{2,3,4,5,6\}$, $Z_2=\{1,3,4,5,6\}$, $Z_3=\{2,4,5,6\}$, $Z_4=\{3,4,5,6\}$,
 $Z_5=\{1,3,5,6\}$, $Z_6=\{4,6\}$, $Z_7=\{3,5\}$ და

$$D = \{\{3,5\}, \{4,6\}, \{1,3,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

ამიტომ გვაქვს, რომ

$$Z_7 \cap Z_6 = \{3,5\} \cap \{4,6\} = \emptyset,$$

$$Z_7 \cap Z_3 = \{3,5\} \cap \{2,4,5,6\} = \{5\} \neq \emptyset,$$

$$Z_6 \cap Z_5 = \{4,6\} \cap \{1,3,5,6\} = \{6\} \neq \emptyset,$$

სადაც $|R^*(Q_1)|=8$, $|R^*(Q_2)|=513$, $|R^*(Q_3)|=900$, $|R^*(Q_4)|=108$, $|R^*(Q_5)|=126$, $|R^*(Q_6)|=24$,
 $|R^*(Q_7)|=8$, $|R^*(Q_8)|=4$, $|R^*(Q_9)|=18$, $|R^*(Q_{10})|=42$, $|R^*(Q_{11})|=8$, $|R^*(Q_{12})|=4$, $|R_D|=1763$ (იხ.
 დამატება 3).

3.4. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$

და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 3.4.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$.

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული α -იზომორფიზმი $V(D, \alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \bar{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$;

13) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \emptyset$;

14) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

15) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.3-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-15 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი

სახე. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.3-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.5-დან, 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.8-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.4-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.7-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.6-დან და 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.9-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

1)-8) შემთხვევა განხილულია წინა პარაგრაფში, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. ახლა განვიხილოთ დანარჩენი შემთხვევები.

9. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.4.1-ის 9) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_9 \mathcal{D}_X = \{\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4\}, D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4\}, D'_3 = \{Z_7, Z_3, Z_1\}, D'_4 = \{Z_3, Z_7, Z_1\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_9) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \quad (3.4.1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.4.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_9)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.4.1-ის 9) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ რომელიდაც $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T, T' \in D$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.4.1-ის 9) პირობის თანახმად გვექნება

$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს $Z_7 \supseteq Z_7$ და $Z_3 \supseteq Z_6$.
გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6$, ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$ და $R(D'_3) \subseteq R(D'_1)$. ანალოგიურად
დამტკიცდება, რომ $R(D'_4) \subseteq R(D'_2)$.

ამიტომ (3.4.1) ტოლობიდან გვექნება:

$$R^*(Q_9) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.4.2)$$

ახლა კი ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.4.3)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$,
მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ
წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.4.2) და (3.4.3) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.4.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset, Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X
სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = 4 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_9)| = 2$, ამიტომ ლემა 3.4.1-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 9)
პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_9)| = 4 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

10. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა
3.4.1-ის 10) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{10} \mathfrak{g}_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_6, Z_4, \check{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4, \check{D}\}, D'_3 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \\ D'_4 &= \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_2\}, D'_5 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_6 = \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_1\}, \\ D'_7 &= \{Z_7, Z_3, Z_1, \check{D}\}, D'_8 = \{Z_3, Z_7, Z_1, \check{D}\}, \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{10}) = \bigcup_{i=1}^8 R(D'_i) \quad (3.4.4)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.4.3. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{10})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.4.1-ის 10) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{10})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, რომელიდან $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T \cup T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.4.1-ის 10) პირობის თანახმად გვექნება: $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $Z_7 \supseteq \check{Z}_7$, $Z_6 \supseteq \check{Z}_6$ და $\check{D} \supseteq Z_2$, ამიტომ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$$

ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$. გამომდინარე აქედან

$$R(D'_4) \subseteq R(D'_2), R(D'_5) \subseteq R(D'_1), R(D'_6) \subseteq R(D'_2), R(D'_7) \subseteq R(D'_1), R(D'_8) \subseteq R(D'_2)$$

ამიტომ (3.4.4) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$R^*(Q_{10}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.4.5)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.4.6)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_Z^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset,$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_Z^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.4.5) და (3.4.6) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{10})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.4.4. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{10})| = 8 \cdot \left(4^{|\check{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\check{D} \setminus Z_4|} \right) \cdot 4^{|\check{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{10})| = 4$, ამიტომ ლემა 3.4.3-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 10)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{10})| = 8 \cdot \left(4^{|\check{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\check{D} \setminus Z_4|} \right) \cdot 4^{|\check{D}|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

11), 12) შემთხვევები განხილულია წინა პარაგრაფში. ახლა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

13) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.4.1-ის 13) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{13} \mathcal{G}_X = \{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\} \}$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{13}) = R(D'_1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4) და

$$|R^*(Q_{13})| = |R(D'_1)| \tag{3.4.7}$$

ლემა 3.4.5. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{13})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{13})| = 1$, ამიტომ (3.4.7) პირობებისა და თეორემა 3.1.17-ის 13)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{13})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

14) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.4.1-ის 14) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{14} \mathcal{G}_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ $R^*(Q_{14}) = R(D'_1)$

(იხ. განმარტება 3.1.4) და

$$|R^*(Q_{14})| = |R(D'_1)| \quad (3.4.8)$$

ლემა 3.4.6. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{14})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{14})| = 1$, ამიტომ (3.4.8) პირობებისა და თეორემა 3.1.17-ის

14) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{14})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

15) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.4.1-ის 15) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{15} \mathcal{G}_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ $R^*(Q_{15}) = R(D'_1)$

(იხ. განმარტება 3.1.4) და

$$|R^*(Q_{15})| = |R(D'_1)| \quad (3.4.9)$$

ლემა 3.4.7. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{15})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|X \setminus D|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{15})| = 1$, ამიტომ (3.4.9) პირობებისა და თეორემა 3.1.17-ის

15) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{15})| = (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|X \setminus D|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა. დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} r_3 &= |R^*(Q_9)| + |R^*(Q_{10})| + |R^*(Q_{11})| + |R^*(Q_{12})| + |R^*(Q_{13})| + |R^*(Q_{14})| + |R^*(Q_{15})| = \\ &= 4 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|} + 8 \cdot (4^{|D \setminus Z_4|} - 3^{|D \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus D|} + \\ &+ 4 \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|D \setminus Z_2|} - 4^{|D \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus D|} + \\ &+ 4 \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|D \setminus Z_1|} - 4^{|D \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus D|} + \\ &+ 4 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus D|} + \\ &+ (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_4|} + (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|D \setminus Z_4|} - 5^{|D \setminus Z_4|}) \cdot 6^{|X \setminus D|} + \\ &+ (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|X \setminus D|} \end{aligned}$$

($|R^*(Q_{11})|$ -ისა და $|R^*(Q_{12})|$ -თვის იხილეთ შესაბამისად ლემა 3.3.6 და ლემა 3.3.7).

თეორემა 3.4.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D -თი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $|R_D| = r_1 + r_3$.

დამტკიცება: მოცემული თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.4.1-დან.

მაგალითი 3.4.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P_0 = \{\emptyset\}, P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_4 = \{\emptyset\}, P_5 = \{4\}, P_6 = \{\emptyset\}, P_7 = \{5\},$$

მაშინ $\bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_1 = \{2, 3, 4, 5\}$, $Z_2 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Z_3 = \{2, 4, 5\}$, $Z_4 = \{3, 4, 5\}$, $Z_5 = \{1, 3, 5\}$,

$Z_6 = \{4, 5\}$, $Z_7 = \{3\}$ და

$$D = \{\{3\}, \{4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

ამიტომ გვაქვს, რომ

$$Z_7 \cap Z_6 = \{3\} \cap \{4,5\} = \emptyset,$$

$$Z_7 \cap Z_3 = \{3\} \cap \{2,4,5\} = \emptyset,$$

$$Z_6 \cap Z_5 = \{4,5\} \cap \{1,3,5\} = \{5\} \neq \emptyset,$$

სადაც $|R^*(Q_1)|=8$, $|R^*(Q_2)|=361$, $|R^*(Q_3)|=612$, $|R^*(Q_4)|=72$, $|R^*(Q_5)|=126$, $|R^*(Q_6)|=16$,
 $|R^*(Q_7)|=8$, $|R^*(Q_8)|=4$, $|R^*(Q_9)|=36$, $|R^*(Q_{10})|=56$, $|R^*(Q_{11})|=8$, $|R^*(Q_{12})|=4$, $|R^*(Q_{13})|=5$,
 $|R^*(Q_{14})|=1$, $|R^*(Q_{15})|=1$, $|R_D|=1318$ (იხ. დამატება 4).

3.5. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$

და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 3.5.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული α -იზომორფიზმი $V(D, \alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \check{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_7^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$.

13) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2)$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(Z_5)$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$.

14) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(Z_5)$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$.

15) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(Z_5)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.4-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-15 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.3-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.5-დან, 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.8-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.4-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.7-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა

გამომდინარეობს თეორემა 3.1.6-დან და 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.9-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

1)-8) შემთხვევები განხილულია წინა პარაგრაფში, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. ახლა განვიხილოთ დანარჩენი შემთხვევები.

9. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.5.1-ის 9) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_9 \mathcal{D}_X = \{\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4\}, D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4\}, D'_3 = \{Z_6, Z_5, Z_2\}, D'_4 = \{Z_5, Z_6, Z_2\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_9) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \quad (3.5.1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.5.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_9)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.5.1-ის 9) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ რომელიც $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T, T' \in D$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ თეორემა 3.5.1-ის 9) პირობის თანახმად გვექნება $Y_T^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს $Z_5 \supseteq Z_7$ და $Z_6 \supseteq Z_6$. გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6$, ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$. ამიტომ ადგილი ექნება ჩართვას $R(D'_3) \subseteq R(D'_1)$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $R(D'_4) \subseteq R(D'_2)$.

ამიტომ (3.5.1) ტოლობებიდან გვექნება:

$$R^*(Q_9) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.5.2)$$

ახლა კი ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.5.3)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.5.2) და (3.5.3) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.5.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = 4 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_9)| = 2$, ამიტომ ლემა 3.5.1-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 9) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_9)| = 4 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

10. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.5.1-ის 10) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვქვია:

$$Q_{10} \mathfrak{g}_X = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_6, Z_4, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4, \bar{D}\}, D'_3 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \\ D'_4 &= \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_2\}, D'_5 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_6 = \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_1\}, \\ D'_7 &= \{Z_6, Z_5, Z_2, \bar{D}\}, D'_8 = \{Z_5, Z_6, Z_2, \bar{D}\}, \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{10}) = \bigcup_{i=1}^8 R(D'_i) \quad (3.5.4)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.5.3. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{10})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.5.1-ის 10) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{10})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ რომელიც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T \cup T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.5.1-ის 10) პირობის თანახმად გვექნება: $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $Z_7 \supseteq Z_7$ ან $Z_6 \supseteq Z_6$ და $\check{D} \supseteq Z_2$, ამიტომ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$$

ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$. გამომდინარე აქედან

$$R(D'_4) \subseteq R(D'_2), R(D'_5) \subseteq R(D'_1), R(D'_6) \subseteq R(D'_2), R(D'_7) \subseteq R(D'_2), R(D'_8) \subseteq R(D'_1)$$

(3.5.4) პირობის თანახმად გვექნება:

$$R^*(Q_{10}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.5.5)$$

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობა:

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.5.6)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_Z^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_Z^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$,

მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ

წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.5.5) და (3.5.6) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{10})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.5.4. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{10})| = 8 \cdot \left(4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|} \right) \cdot 4^{|\bar{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{10})| = 4$, ამიტომ ლემა 3.5.3-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 10)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{10})| = 8 \cdot \left(4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|} \right) \cdot 4^{|\bar{D}|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

11), 12) შემთხვევები განხილულია წინა პარაგრაფში. ახლა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

13) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.5.1-ის 13) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{13} \vartheta_{XI} = \{ \{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2 \} \}$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2 \}$ სამართლიანია, მაშინ $R^*(Q_{13}) = R(D'_1)$

(იხ. განმარტება 3.1.4) და

$$|R^*(Q_{13})| = |R(D'_1)| \tag{3.5.7}$$

ლემა 3.5.5. ვთქვათ $D = \{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D} \} \in \Sigma_2(X, 8)$ $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{13})| = \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{13})| = 1$, ამიტომ (3.5.7) პირობებისა და თეორემა 3.1.17-ის 13)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{13})| = \left(2^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

14) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.5.1-ის 14) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{14} \mathfrak{g}_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}\}$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ $R^*(Q_{14}) = R(D'_1)$

(იხ. განმარტება 3.1.4) და

$$|R^*(Q_{14})| = |R(D'_1)| \quad (3.5.8)$$

ლემა 3.5.6. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{14})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{14})| = 1$, ამიტომ (3.5.8) პირობებისა და თეორემა 3.1.17-ის 14)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{14})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

15) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.5.1-ის 15) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{15} \mathfrak{g}_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}\}$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{15}) = R(D'_1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4) და

$$|R^*(Q_{15})| = |R(D'_1)| \quad (3.5.9)$$

ლემა 3.5.7. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{15})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{15})| = 1$, ამიტომ (3.5.9) პირობებისა და თეორემა 3.1.17-ის 15)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{15})| = (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა. დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} r_4 &= |R^*(Q_9)| + |R^*(Q_{10})| + |R^*(Q_{11})| + |R^*(Q_{12})| + |R^*(Q_{13})| + |R^*(Q_{14})| + |R^*(Q_{15})| = \\ &= 4 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|} + 8 \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 4 \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 4 \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 4 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|} + (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\ &+ (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

$(|R^*(Q_{11})| -$ ისა და $|R^*(Q_{12})| -$ თვის იხილეთ შესაბამისად ლემა 3.3.6 და ლემა 3.3.7).

თეორემა 3.5.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D -თი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $|R_D| = r_1 + r_4$.

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.5.1-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.5.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P_0 = \{\emptyset\}, P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_4 = \{\emptyset\}, P_5 = \{4\}, P_6 = \{5\}, P_7 = \{\emptyset\},$$

მაშინ $\bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_1 = \{2, 3, 4, 5\}$, $Z_2 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Z_3 = \{2, 4, 5\}$, $Z_4 = \{3, 4, 5\}$, $Z_5 = \{1, 3, 5\}$,

$Z_6 = \{4\}$, $Z_7 = \{3, 5\}$ და

$$D = \{\{3, 5\}, \{4\}, \{1, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

ამიტომ გვაქვს, რომ

$$Z_7 \cap Z_6 = \{3\} \cap \{4, 5\} = \emptyset,$$

$$Z_6 \cap Z_5 = \{4\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset,$$

$$Z_7 \cap Z_3 = \{3, 5\} \cap \{2, 4, 5\} = \{5\} \neq \emptyset,$$

$$\text{სადაც } |R^*(Q_1)|=8, |R^*(Q_2)|=361, |R^*(Q_3)|=612, |R^*(Q_4)|=72, |R^*(Q_5)|=126, |R^*(Q_6)|=16,$$

$$|R^*(Q_7)|=8, |R^*(Q_8)|=4, |R^*(Q_9)|=36, |R^*(Q_{10})|=56, |R^*(Q_{11})|=8, |R^*(Q_{12})|=4, |R^*(Q_{13})|=5,$$

$$|R^*(Q_{14})|=1, |R^*(Q_{15})|=1, |R_D|=1318 \text{ (იხ. დანართი 5).}$$

3.6. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების

რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset, Z_6 \cap Z_5 = \emptyset, Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$

და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset, Z_6 \cap Z_5 = \emptyset, Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 3.6.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset, Z_6 \cap Z_5 = \emptyset, Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული α -იზომორფიზმი $V(D, \alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D, T \subset T', Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T), Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D, T \subset T' \subset T'', Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T), Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'), Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset, Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \check{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$, $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$, $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$.

13) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_Z^\alpha \times Z_Z)$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

14) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', Z, Z' \in D$, $Z \in \{Z_5, Z_3\}$, $Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \subset Z' \subset \check{D}$, $T' \subset Z \subset Z'$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\check{D}) \neq \emptyset$.

15) $\alpha = (Y_T^\alpha \times Z_T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T'' \cup Z_4}^\alpha \times (T'' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \check{D})$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$, $T'' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T''$, $T \cup T' = Z_4$, $(T'' \cup Z_4) \cup Z = \check{D}$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T'' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T'' \neq \emptyset$, $(T'' \cup Z_4) \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (T'' \cup Z_4) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$, ლემა 1.3.5-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-15 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ

ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.3-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.5-დან, 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.8-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.4-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.7-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.6-დან და 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.9-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

1)-8) შემთხვევები განხილულია წინა პარაგრაფში, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. ახლა განვიხილოთ დანარჩენი შემთხვევები.

9. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.6.1-ის 9) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_9 \vartheta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_6, Z_4\}, D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4\}, D'_3 = \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \\ D'_4 &= \{Z_3, Z_7, Z_1\}, D'_5 = \{Z_6, Z_5, Z_2\}, D'_6 = \{Z_5, Z_6, Z_2\} \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_9) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \cup R(D'_5) \cup R(D'_6) \quad (3.6.1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.6.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_9)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.6.1-ის 9) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$

რომელიც $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T, T' \in D$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.6.1-ის 9) პირობის თანახმად გვექნება $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს $Z_7 \supseteq Z_7$ და $Z_3 \supseteq Z_6$. გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6$, i.e. $\alpha \in R(D_1')$. ამიტომ ადგილი ექნება ჩართვას $R(D_3) \subseteq R(D_1')$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $R(D_4) \subseteq R(D_2')$, $R(D_5) \subseteq R(D_2')$, $R(D_6) \subseteq R(D_1')$.

ამიტომ (3.6.1) ტოლობებიდან გვექნება:

$$R^*(Q_9) = R(D_1') \cup R(D_2') \quad (3.6.2)$$

ახლა კი ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D_1') \cap R(D_2') = \emptyset \quad (3.6.3)$$

თუ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D_1') \cap R(D_2') = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.6.2) და (3.6.3) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D_1')| + |R(D_2')|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.6.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = 6 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_9)| = 3$, ამიტომ ლემა 3.6.1-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 9) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_9)| = 6 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

10. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.6.1-ის 10) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{10} \mathcal{G}_X = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, \check{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \check{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \check{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_6, Z_4, \check{D}\}, D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4, \check{D}\}, D'_3 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \\ D'_4 &= \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_2\}, D'_5 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, D'_6 = \{Z_6, Z_7, Z_4, Z_1\}, \\ D'_7 &= \{Z_7, Z_3, Z_1, \check{D}\}, D'_8 = \{Z_3, Z_7, Z_1, \check{D}\}, D'_9 = \{Z_6, Z_5, Z_2, \check{D}\}, \\ D'_{10} &= \{Z_5, Z_6, Z_2, \check{D}\} \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{10}) = \bigcup_{i=1}^{10} R(D'_i) \quad (3.6.4)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.6.3. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{10})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.6.1-ის 10) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{10})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ რომელიდაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T \cup T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.6.1-ის 10) პირობის თანახმად გვექნება: $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $Z_7 \supseteq \check{Z}_7$ ან $Z_6 \supseteq \check{Z}_6$ და $\check{D} \supseteq Z_2$, ამიტომ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T''}^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$$

ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$. გამომდინარე აქედან

$$\begin{aligned} R(D'_4) &\subseteq R(D'_2), R(D'_5) \subseteq R(D'_1), R(D'_6) \subseteq R(D'_2), R(D'_7) \subseteq R(D'_1), \\ R(D'_8) &\subseteq R(D'_2), R(D'_9) \subseteq R(D'_2), R(D'_{10}) \subseteq R(D'_1) \end{aligned}$$

(3.6.4) პირობის თანახმად გვექნება:

$$R^*(Q_{10}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.6.5)$$

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობა:

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.6.6)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_Z^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \supseteq Z_4, Y_Z^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.6.5) და (3.6.6) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{10})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.6.4. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{10})| = 10 \cdot (4^{|\check{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\check{D} \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|\check{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{10})| = 5$, ამიტომ ლემა 3.6.3-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 10)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{10})| = 10 \cdot (4^{|\check{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\check{D} \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|\check{D}|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

11), 12) შემთხვევები განხილულია წინა პარაგრაფში. ახლა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

13) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.6.1-ის 13) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{13} \mathcal{M}_X = \left\{ \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\} \right\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}$, $D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}$, სამართლიანია,

მაშინ

$$R^*(Q_{13}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.6.7)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.6.5. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{13})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.6.1-ის 13) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{13})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.6.8)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_3, Y_Z^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_5, Y_Z^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T''}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.6.7) და (3.6.8) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{13})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.6.6. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{13})| = 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_4|} + 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{13})| = 2$, ამიტომ ლემა 3.6.5-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 13)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{13})| = 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_4|} + 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

14) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.6.1-ის 14) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{14}g_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \check{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \check{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \check{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \check{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{14}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.6.9)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4)

ლემა 3.6.7. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \check{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{14})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.6.1-ის 14) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{14})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.6.10)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_3, Y_Z^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_5, Y_Z^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \check{D} \neq \emptyset, \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$,

მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.6.9) და (3.6.10) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{14})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია

ლემა 3.6.8. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{14})| = 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{14})| = 2$, ამიტომ ლემა 3.6.7-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 14) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ ლემა 3.6.8 სამართლიანია.

ლემა დამტკიცებულია.

15) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.6.1-ის 15) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{15} \vartheta_{XI} = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{15}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.6.11)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.6.9. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{15})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.6.1-ის 15) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{15})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.6.12)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset,$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.6.11) და (3.6.12) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{15})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.6.10. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{15})| = 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|\bar{D}|} + 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|\bar{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{15})| = 2$, ამიტომ ლემა 3.6.9-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 15) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ ლემა 3.6.10 სამართლიანია.

ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა. დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} r_5 &= |R^*(Q_9)| + |R^*(Q_{10})| + |R^*(Q_{11})| + |R^*(Q_{12})| + |R^*(Q_{13})| + |R^*(Q_{14})| + |R^*(Q_{15})| = \\ &= 6 \cdot 3^{|\bar{X} \setminus Z_4|} + 10 \cdot (4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|}) \cdot 4^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 4 \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 5^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 4 \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}) \cdot (5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 5^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 4 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|\bar{X} \setminus Z_1|} + 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|\bar{X} \setminus Z_2|} + \\ &+ 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_1|}) \cdot 6^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot (6^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_2|}) \cdot 6^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + \\ &+ 2 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot (4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot 7^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} + 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}) \cdot 7^{|\bar{X} \setminus \bar{D}|} \end{aligned}$$

($|R^*(Q_{11})|$ -ისა და $|R^*(Q_{12})|$ -თვის იხილეთ შესაბამისად ლემა 3.3.6 და ლემა 3.3.7).

თეორემა 3.6.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D -თი აღვნიშნავთ

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $|R_D| = r_1 + r_5$.

დამტკიცება: მოცემული თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.6.1-დან.

მაგალითი 3.6.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P_0 = \{\emptyset\}, P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_4 = \{4\}, P_5 = \{5\}, P_6 = \{\emptyset\}, P_7 = \{\emptyset\},$$

მაშინ $\check{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_1 = \{2, 3, 4, 5\}$, $Z_2 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Z_3 = \{2, 4, 5\}$, $Z_4 = \{3, 5\}$, $Z_5 = \{1, 3, 4\}$, $Z_6 = \{5\}$, $Z_7 = \{3\}$ და

$$D = \{\{3\}, \{5\}, \{1, 3, 4\}, \{3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

ამიტომ გვაქვს, რომ

$$Z_7 \cap Z_6 = \{3\} \cap \{5\} = \emptyset,$$

$$Z_7 \cap Z_3 = \{3\} \cap \{2, 4, 5\} = \emptyset,$$

$$Z_6 \cap Z_5 = \{5\} \cap \{1, 3, 4\} = \emptyset,$$

$$Z_5 \cap Z_3 = \{1, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5\} \neq \emptyset,$$

სადაც $|R^*(Q_1)| = 8$, $|R^*(Q_2)| = 437$, $|R^*(Q_3)| = 1116$, $|R^*(Q_4)| = 156$, $|R^*(Q_5)| = 350$, $|R^*(Q_6)| = 16$,
 $|R^*(Q_7)| = 24$, $|R^*(Q_8)| = 4$, $|R^*(Q_9)| = 162$, $|R^*(Q_{10})| = 370$, $|R^*(Q_{11})| = 56$, $|R^*(Q_{12})| = 12$,
 $|R^*(Q_{13})| = 60$, $|R^*(Q_{14})| = 12$, $|R^*(Q_{15})| = 4$ $|R_D| = 2787$ (იხ. დამატება 6).

3.7. $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ და მათი დათვლის ფორმულები

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$ და მოცემული შემთხვევისთვის აღწერილია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები და თუ X სასრული სიმრავლეა დათვლილია მათი რაოდენობა.

თეორემა 3.7.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$ და $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული α -იზომორფიზმი $V(D, \alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

$$1) \alpha = X \times T, \text{ სადაც } T \in D;$$

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset \bar{D}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$, $Z, Z' \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z \neq Z'$, $Z \setminus Z' \neq \emptyset$, $Z' \setminus Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_{Z'}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$;

7) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'' \in D$,
 $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus T' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$;

8) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T' \cup Z_4}^\alpha \times (T' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_7, Z_6\}$,
 $T' \in \{Z_5, Z_3\}$, $T \subset T'$, $Z_4 \cup T', Z \in \{Z_2, Z_1\}$, $Z_4 \cup T' \neq Z$, $T' \setminus Z_4 \neq \emptyset$, $Z_4 \setminus T' \neq \emptyset$,
 $(Z_4 \cup T') \setminus Z \neq \emptyset$, $Z \setminus (Z_4 \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს:
 $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$,
 $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$;

9) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$;

10) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \setminus T' \neq \emptyset$,
 $T' \setminus T \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$,
 $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

11) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$,
 $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$;

12) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$
და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7)$, $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6)$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$,
 $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$.

13) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$, სადაც $T, T', T'', Z \in D$,
 $(T \cup T') \subset Z$, $T' \subset T'' \subset Z$, $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \emptyset$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$,
 $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$;

14) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', Z, Z' \in D, Z \in \{Z_5, Z_3\}, Z' \in \{Z_2, Z_1\}, Z_4 \subset Z' \subset \bar{D}, T' \subset Z \subset Z', T \setminus T' \neq \emptyset, T' \setminus T \neq \emptyset, Z_4 \setminus Z \neq \emptyset, Z \setminus Z_4 \neq \emptyset, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T), Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T'), Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z), Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset, Y_0^\alpha \cap \varphi(\bar{D}) \neq \emptyset$.

15) $\alpha = (Y_T^\alpha \times Z_T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{T'' \cup Z_4}^\alpha \times (T'' \cup Z_4)) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $T, T', T'', Z \in D, T'' \in \{Z_5, Z_3\}, T \subset T'', T \cup T' = Z_4, (T'' \cup Z_4) \cup Z = \bar{D}, T \setminus T' \neq \emptyset, T' \setminus T \neq \emptyset, T'' \setminus Z_4 \neq \emptyset, Z_4 \setminus T'' \neq \emptyset, (T'' \cup Z_4) \setminus Z \neq \emptyset, Z \setminus (T'' \cup Z_4) \neq \emptyset, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_Z^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T), Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T'), Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T''), Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z), Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset, Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$.

16) $\alpha = (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_7^\alpha, Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varphi(Z_7), Y_6^\alpha \supseteq \varphi(Z_6), Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(Z_5), Y_6^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3), Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \emptyset$.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$, ლემა 1.3.6-ის თანახმად გვაქვს, რომ ნახ.5-ის 1-16 დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერები წარმოადგენენ მოცემული D ნახევარმესერის XI – ქვენახევარმესერებს, $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც მოცემული XI – ნახევარმესერებით განისაზღვრებიან, აქვთ ზემოთ ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი სახე. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.3-დან, 5)-7) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.5-დან, 8) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.8-დან, 9)-11) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.4-დან, 12) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.7-დან, 13), 14) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.6-დან, 15) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.1.9-დან და 16) პირობის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 3.1.1-დან

თეორემა დამტკიცებულია.

1)-8) შემთხვევები განხილულია წინა პარაგრაფში, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. ახლა განვიხილოთ დანარჩენი შემთხვევები.

9. ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.7.1-ის 9) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_9 \mathcal{D}_X = \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, \bar{D}\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_6, Z_4\}, D'_2 = \{Z_6, Z_7, Z_4\}, D'_3 = \{Z_7, Z_3, Z_1\}, \\ D'_4 &= \{Z_3, Z_7, Z_1\}, D'_5 = \{Z_6, Z_5, Z_2\}, D'_6 = \{Z_5, Z_6, Z_2\}, \\ D'_7 &= \{Z_5, Z_3, \bar{D}\}, D'_8 = \{Z_3, Z_5, \bar{D}\} \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_9) = \bigcup_{i=1}^8 R(D'_i) \quad (3.7.1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.7.1. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_9)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.7.1-ის 9) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ რომელიც $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $T, T' \in D$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.6.1-ის 9) პირობის თანახმად გვექნება $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს $Z_7 \supseteq Z_7$ და $Z_3 \supseteq Z_6$. გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6$, ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$. ამიტომ ადგილი ექნება ჩართვას $R(D'_3) \subseteq R(D'_1)$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $R(D'_4) \subseteq R(D'_2)$, $R(D'_5) \subseteq R(D'_2)$, $R(D'_6) \subseteq R(D'_1)$, $R(D'_7) \subseteq R(D'_1)$, $R(D'_8) \subseteq R(D'_2)$.

ამიტომ (3.7.1) ტოლობებიდან გვექნება:

$$R^*(Q_9) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.7.2)$$

ახლა კი ვაჩვენოთ, რომ

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.7.3)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha &\supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, \\ Y_T^\alpha &\supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$, მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.7.2) და (3.7.3) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_9)| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.7.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_9)| = 8 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_9)| = 4$, ამიტომ ლემა 3.7.1-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 9) პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_9)| = 8 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

10), 11), 12) 14) და 15) შემთხვევები განხილულია წინა პარაგრაფში. ახლა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

13) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.7.1-ის 13) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{13} \mathcal{D}_X = \left\{ \left\{ \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\} \right\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, D'_2 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2\}, \\ D'_3 &= \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \bar{D}\}, D'_4 = \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \bar{D}\} \end{aligned}$$

სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{13}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \cup R(D'_3) \cup R(D'_4) \quad (3.7.4)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4).

ლემა 3.7.3. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{13})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 3.7.1-ის 13) პირობას, მაშინ

$$|R^*(Q_{13})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D'_3)$, მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_Z^\alpha \times Z_Z)$ რომელიც $T \setminus T' \neq \emptyset$, $T' \setminus T \neq \emptyset$, $(T \cup T') \setminus T'' \neq \emptyset$, $T'' \setminus (T \cup T') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, \neq \{\emptyset\}$ და თეორემა 3.7.1-ის 10) პირობის თანახმად გვექნება: $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_{T''}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $Z_3 \supseteq Z_6$ და $Z_7 \supseteq Z_7$. გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_{T''}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$, ე.ი., $\alpha \in R(D'_1)$. ამიტომ ადგილი ექნება ჩართვას $R(D'_3) \subseteq R(D'_1)$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $R(D'_4) \subseteq R(D'_2)$.

ამიტომ (3.7.4) ტოლობებიდან გვექნება:

$$R^*(Q_{13}) = R(D'_1) \cup R(D'_2) \quad (3.7.5)$$

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობა:

$$R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset \quad (3.7.6)$$

თუ $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$, მაშინ

$$\begin{aligned} Y_T^\alpha \supseteq Z_7, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6, Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_3, Y_Z^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, \\ Y_T^\alpha \supseteq Z_6, Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, Y_T^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_5, Y_Z^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset \end{aligned}$$

გამომდინარე აქედან $Y_T^\alpha \supseteq Z_7 \cup Z_6 = Z_4$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_7 = Z_4$ და $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \emptyset$,

მაგრამ $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \neq \emptyset$ პირობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ

წარმოდგენას. ამიტომ $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \emptyset$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (3.7.5) და (3.7.6) პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{13})| = |R(D'_1)| + |R(D'_2)|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3.7.4. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{13})| = 4 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + 4 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{13})| = 4$, ამიტომ ლემა 3.7.3-ისა და თეორემა 3.1.17-ის 13)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $|R^*(Q_{13})| = 4 \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + 4 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$.

ლემა დამტკიცებულია.

16) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 3.7.1-ის 16) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_{16} \vartheta_{X'} = \left\{ \left\{ Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D} \right\} \right\}$$

თუ შემდეგი ტოლობა $D'_1 = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\}$ სამართლიანია, მაშინ

$$R^*(Q_{16}) = R(D'_1)$$

(იხ. განმარტება 3.1.4) და

$$|R^*(Q_{16})| = |R(D'_1)| \quad (3.7.7)$$

ლემა 3.7.5. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$|R^*(Q_{16})| = 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|}$$

დამტკიცება: რადგან $|\Omega(Q_{16})| = 1$, ამიტომ (3.7.7) პირობისა და თეორემა 3.1.17-ის 16)

პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$|R^*(Q_{16})| = 2 \cdot (2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა. დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned}
 r_6 = & |R^*(Q_9)| + |R^*(Q_{10})| + |R^*(Q_{11})| + |R^*(Q_{12})| + |R^*(Q_{13})| + |R^*(Q_{14})| + |R^*(Q_{15})| + |R^*(Q_{16})| = \\
 & = 8 \cdot 3^{|X \setminus Z_4|} + 10 \cdot \left(4^{|\bar{D} \setminus Z_4|} - 3^{|\bar{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \bar{D}|} + 4 \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{|\bar{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & + 4 \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{|\bar{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\bar{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \bar{D}|} + 4 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & + 4 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_3|} + 4 \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|} + 2 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\bar{D} \setminus Z_3|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} \\
 & + 2 \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\bar{D} \setminus Z_5|} - 5^{|\bar{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \bar{D}|} + 2 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} + \\
 & 2 \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \bar{D}|} + 2 \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 8^{|X \setminus \bar{D}|} \\
 & \left(|R^*(Q_{10})| - \text{ის}, |R^*(Q_{11})| - \text{ის}, |R^*(Q_{12})| - \text{ის}, |R^*(Q_{14})| - \text{ის და } |R^*(Q_{15})| - \text{თვის}\right.
 \end{aligned}$$

შესაბამისადიხილეთ ლემა 3.6.4, ლემა 3.3.6, ლემა 3.3.7, ლემა 3.6.7 და ლემა 3.6.10).

თეორემა 3.7.2. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_2(X, 8)$, $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. თუ X სასრული სიმრავლეა და R_D -თი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, მაშინ $|R_D| = r_1 + r_6$.

დამტკიცება: მოცემული თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 3.7.1-დან.

მაგალითი 3.7.1. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$P_0 = \{\emptyset\}, P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_4 = \{\emptyset\}, P_5 = \{4\}, P_6 = \{\emptyset\}, P_7 = \{\emptyset\},$$

მაშინ $\bar{D} = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z_1 = \{2, 3, 4\}$, $Z_2 = \{1, 3, 4\}$, $Z_3 = \{2, 4\}$, $Z_4 = \{3, 4\}$, $Z_5 = \{1, 3\}$, $Z_6 = \{4\}$,

$Z_7 = \{3\}$ და

$$D = \{\{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

ამიტომ გვაქვს, რომ

$$Z_5 \cap Z_3 = \{1, 3\} \cap \{2, 4\} = \emptyset,$$

სადაც $|R^*(Q_1)| = 8$, $|R^*(Q_2)| = 209$, $|R^*(Q_3)| = 324$, $|R^*(Q_4)| = 36$, $|R^*(Q_5)| = 126$, $|R^*(Q_6)| = 8$,

$|R^*(Q_7)| = 8$, $|R^*(Q_8)| = 4$, $|R^*(Q_9)| = 72$, $|R^*(Q_{10})| = 70$, $|R^*(Q_{11})| = 8$, $|R^*(Q_{12})| = 4$, $|R^*(Q_{13})| = 40$,

$|R^*(Q_{14})| = 4$, $|R^*(Q_{15})| = 4$, $|R^*(Q_{16})| = 2$, $|R_D| = 927$ (იხ. დამატება 7).

დამატება 1

მაგალითი 1. ამ მაგალითში მოცემულია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის ყველა ქვენახევარმესერი, როცა $|X| = 4$.

ქვენახევარმესერები

$$D_1 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{4\}, \{3\}\},$$

$$D_2 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{3\}\},$$

$$D_3 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2\}, \{4\}, \{1\}\},$$

$$D_4 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{4\}, \{1\}\},$$

$$D_5 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2\}, \{4\}, \{2\}\},$$

$$D_6 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{2\}\},$$

$$D_7 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1\}\},$$

$$D_8 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3\}, \{1\}\},$$

$$D_9 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{2\}\},$$

$$D_{10} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{2\}\},$$

$$D_{11} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2\}, \{1\}\},$$

$$D_{12} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{1\}\},$$

ე.ი., მივიღეთ, რომ თუ $|X| = 4$, მაშინ $|\Sigma_2(X, 8)| = 12$. ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ თეორიულ ნაწილში მიღებული შედეგი დაემთხვა პრაქტიკულ შედეგს.

დამატება 2

როგორც ცნობილია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარულ ელემენტებს ვპოულობთ შემდეგი თეორემის საშუალებით:

თეორემა 1. ვთქვათ α არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი. მაშინ ერთდროულად სამართლიანია შემდეგი ორი წინადადება:

a) $V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \alpha);$

b) $V(D, \alpha)$ იქნება გაერთიანებათა სრული XI – ნახევარმესერი.

(იხ. [68], თეორემა 6.3.1).

ამ თეორემის საშუალებით მოცემულ 2-7 დამატებებში ნაპოვნია ყველა რეგულარული ელემენტი. ეს პრაქტიკული გამოთვლები შედარებულია თეორიულ ნაწილში მიღებულ გამოთვლებს და მივიღეთ, რომ მათი რაოდენობები დაემთხვა ერთმანეთს.

დამატება 2-ში მოცემულია $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის X – ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაგალითი, როცა $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. მოცემულ ნახევარჯგუფში ნაპოვნია ყველა იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები.

შენიშვნა: მოცემულ 2-7 დამატებებში თითოეულ მატრიცას მინიჭებული აქვს რიგითი ნომერი და ვარსკვლავები, ერთი ვარსკვლავით აღნიშნულია შესაბამისი ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტები, ხოლო ორი ვარსკვლავით აღნიშნულია იდემპოტენტური ელემენტები.

მაგალითი 2. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ და

$$D = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი იზომორფულია მატრიცთა $B_5(D)$ ნახევარჯგუფისა, რომლის რეგულარული ელემენტებია:

$$\begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_1^{**}, \begin{pmatrix} 10111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 10111 \\ 11111 \end{pmatrix}_2^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 10111 \\ 11111 \\ 10111 \\ 11111 \end{pmatrix}_3^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 11111 \\ 10111 \\ 10111 \\ 11111 \end{pmatrix}_4^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 10111 \\ 10111 \\ 10111 \\ 11111 \end{pmatrix}_5^*, \begin{pmatrix} 11011 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11011 \\ 11111 \end{pmatrix}_6^*, \begin{pmatrix} 11011 \\ 11011 \\ 11111 \\ 11011 \\ 11111 \end{pmatrix}_7^*, \begin{pmatrix} 11011 \\ 11111 \\ 11011 \\ 11011 \\ 11111 \end{pmatrix}_8^*,$$

როგორც ჩანს 164 იდემპოტენტური და 723 რეგულარული ელემენტია, ე.ი., თეორიული და პრაქტიკული გამოთვლები დაემთხვა ერთმანეთს.

დამატება 3

დამატება 3-ში მოცემულია მაგალითი $\Sigma_2(X,8)$ კლასის X -ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფისა, როცა $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. მოცემულ ნახევარჯგუფში ნაპოვნია ყველა იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები.

მაგალითი 3. ვთქვათ $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ და

$$D = \{\{3,5\}, \{4,6\}, \{1,3,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი იზომორფულია მატრიცთა $B_6(D)$ ნახევარჯგუფისა, რომლის რეგულარული ელემენტებია:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 111111 \\ 111111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_1^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 111111 \end{pmatrix}_2^* , \begin{pmatrix} 011111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 111111 \end{pmatrix}_3^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 111111 \end{pmatrix}_4^* , \begin{pmatrix} 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 111111 \end{pmatrix}_5^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 111111 \end{pmatrix}_6^* , \begin{pmatrix} 011111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 111111 \end{pmatrix}_7^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 111111 \end{pmatrix}_8^* , \\ & \begin{pmatrix} 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 111111 \end{pmatrix}_9^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 101111 \\ 111111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{10}^* , \begin{pmatrix} 101111 \\ 111111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{11}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{12}^* , \begin{pmatrix} 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{13}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{14}^* , \begin{pmatrix} 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{15}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{16}^* , \\ & \begin{pmatrix} 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{17}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{18}^* , \begin{pmatrix} 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{19}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 010111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{20}^* , \begin{pmatrix} 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{21}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 010111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{22}^* , \begin{pmatrix} 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{23}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 010111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{24}^* , \\ & \begin{pmatrix} 010111 \\ 010111 \\ 010111 \\ 010111 \\ 010111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{25}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{26}^* , \begin{pmatrix} 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{27}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 001111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{28}^* , \begin{pmatrix} 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{29}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 001111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{30}^* , \begin{pmatrix} 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{31}^* , \begin{pmatrix} 111111 \\ 001111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{32}^* , \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 011111 \\ 101011 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1753}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 101111 \\ 101011 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1754}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 001111 \\ 101011 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1755}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 101011 \\ 101011 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1756}^{**} \quad , \quad \begin{pmatrix} 001010 \\ 101011 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1757}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1758}^{**} \quad , \quad \begin{pmatrix} 011111 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1759}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 101111 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1760}^{**} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} 001111 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1761}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 101011 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1762}^{**} \quad , \quad \begin{pmatrix} 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \\ 001010 \end{pmatrix}_{1763}^{**} \quad .$$

როგორც ჩანს 379 იდემპოტენტური და 1763 რეგულარული ელემენტია, ე.ი., თეორიული და პრაქტიკული გამოთვლები დაემთხვა ერთმანეთს.

დამატება 4

დამატება 4-ში მოცემულია მაგალითი $\Sigma_2(X,8)$ კლასის X -ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფისა, როცა $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_6 \cap Z_5 \neq \emptyset$. მოცემულ ნახევარჯგუფში ნაპოვნია ყველა იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები.

მაგალითი 4. ვთქვათ $X = \{1,2,3,4,5\}$ და

$$D = \{\{3\}, \{4,5\}, \{1,3,5\}, \{3,4,5\}, \{2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი იზომორფულია მატრიცთა $B_5(D)$ ნახევარჯგუფისა, რომლის რეგულარული ელემენტებია:

$$\begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 111111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_1^{**} \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_2^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 011111 \\ 111111 \\ 011111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_3^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_4^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_5^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 101111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_6^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 101111 \\ 111111 \\ 101111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_7^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_8^* \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} 101111 \\ 101111 \\ 101111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_9^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{10}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 010111 \\ 111111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{11}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 010111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{12}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 010111 \\ 010111 \\ 010111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{13}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{14}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 001111 \\ 111111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{15}^* \quad , \quad \begin{pmatrix} 111111 \\ 001111 \\ 001111 \\ 111111 \\ 111111 \end{pmatrix}_{16}^* \quad ,$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 10111 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1297}^{**}, \begin{pmatrix} 00111 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1298}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1299}^*, \begin{pmatrix} 00100 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1300}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 00111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1301}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 00111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1302}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 00111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1303}^*, \begin{pmatrix} 00111 \\ 00111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1304}^*, \\
& \begin{pmatrix} 10101 \\ 00111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1305}^*, \begin{pmatrix} 00100 \\ 00111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1306}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 10101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1307}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 10101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1308}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 10101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1309}^*, \begin{pmatrix} 00111 \\ 10101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1310}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 10101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1311}^{**}, \begin{pmatrix} 00100 \\ 10101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1312}^*, \\
& \begin{pmatrix} 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1313}^{**}, \begin{pmatrix} 01111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1314}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1315}^{**}, \begin{pmatrix} 00111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1316}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1317}^{**}, \begin{pmatrix} 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{1318}^{**}.
\end{aligned}$$

როგორც ჩანს 296 იდემპოტენტური და 1318 რეგულარული ელემენტია, ე.ი., თეორიული და პრაქტიკული გამოთვლები დაემთხვა ერთმანეთს.

დამატება 5

დამატება 5-ში მოცემულია მაგალითი $\Sigma_2(X,8)$ კლასის X -ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფისა, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 \neq \emptyset$. მოცემულ ნახევარჯგუფში ნაპოვნია ყველა იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები.

მაგალითი 5. ვთქვათ $X = \{1,2,3,4,5\}$ და

$$D = \{\{3,5\}, \{4\}, \{1,3,5\}, \{3,4,5\}, \{2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი იზომორფულია მატრიცთა $B_S(D)$ ნახევარჯგუფისა, რომლის რეგულარული ელემენტებია:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_1^{**}, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_2^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_3^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 01111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_4^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 01111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_5^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_6^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_7^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_8^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 00101 \\ 01111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1265}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 10111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1266}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 10111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1267}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 10111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1268}^*, \begin{pmatrix} 00101 \\ 10111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1269}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 00111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1270}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 00111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1271}^*, \begin{pmatrix} 00111 \\ 00111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1272}^*, \\
& \begin{pmatrix} 10101 \\ 00111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1273}^*, \begin{pmatrix} 00101 \\ 00111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1274}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 10101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1275}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 10101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1276}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 10101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1277}^*, \begin{pmatrix} 00101 \\ 10101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1278}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 00101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1279}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 00101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1280}^*, \\
& \begin{pmatrix} 10101 \\ 00101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1281}^*, \begin{pmatrix} 00101 \\ 00101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1282}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1283}^{**}, \begin{pmatrix} 01111 \\ 11111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1284}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 11111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1285}^{**}, \begin{pmatrix} 00111 \\ 11111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1286}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 11111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1287}^{**}, \begin{pmatrix} 00101 \\ 11111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1288}^{**}, \\
& \begin{pmatrix} 11111 \\ 01111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1289}^{**}, \begin{pmatrix} 01111 \\ 01111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1290}^{**}, \begin{pmatrix} 10111 \\ 01111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1291}^{**}, \begin{pmatrix} 00111 \\ 01111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1292}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 01111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1293}^{**}, \begin{pmatrix} 00101 \\ 01111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1294}^{**}, \begin{pmatrix} 11111 \\ 10111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1295}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 10111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1296}^*, \\
& \begin{pmatrix} 10111 \\ 10111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1297}^{**}, \begin{pmatrix} 00111 \\ 10111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1298}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 10111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1299}^*, \begin{pmatrix} 00101 \\ 10111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1300}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 00111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1301}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 00111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1302}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 00111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1303}^*, \begin{pmatrix} 00111 \\ 00111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1304}^*, \\
& \begin{pmatrix} 10101 \\ 00111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1305}^*, \begin{pmatrix} 00101 \\ 00111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1306}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1307}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1308}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1309}^*, \begin{pmatrix} 00111 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1310}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1311}^{**}, \begin{pmatrix} 00101 \\ 10101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1312}^*, \\
& \begin{pmatrix} 11111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1313}^{**}, \begin{pmatrix} 01111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1314}^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1315}^{**}, \begin{pmatrix} 00111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1316}^*, \begin{pmatrix} 10101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1317}^{**}, \begin{pmatrix} 00101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 00101 \end{pmatrix}_{1318}^{**}.
\end{aligned}$$

როგორც ჩანს 296 იდემპოტენტური და 1318 რეგულარული ელემენტია, ე.ი., თეორიული და პრაქტიკული გამოთვლები დაემთხვა ერთმანეთს.

დამატება 6

დამატება 6-ში მოცემულია მაგალითი $\Sigma_2(X,8)$ კლასის X -ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფისა, როცა $Z_6 \cap Z_5 = \emptyset$, $Z_7 \cap Z_3 = \emptyset$, $Z_5 \cap Z_3 \neq \emptyset$. მოცემულ ნახევარჯგუფში ნაპოვნია ყველა იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები.

მაგალითი 6. ვთქვათ $X = \{1,2,3,4,5\}$ და

$$D = \{\{3\}, \{5\}, \{1,3,4\}, \{3,5\}, \{2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი იზომორფულია მატრიცთა $B_S(D)$ ნახევარჯგუფისა, რომლის რეგულარული ელემენტებია:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_1^{**}, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_2^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_3^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_4^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_5^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 10111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_6^*, \begin{pmatrix} 10111 \\ 11111 \\ 10111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_7^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 10111 \\ 10111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_8^*, \\ & \begin{pmatrix} 10111 \\ 10111 \\ 10111 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_9^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 01011 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{10}^*, \begin{pmatrix} 01011 \\ 11111 \\ 01011 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{11}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 01011 \\ 01011 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{12}^*, \begin{pmatrix} 01011 \\ 01011 \\ 01011 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{13}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00101 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{14}^*, \begin{pmatrix} 00101 \\ 11111 \\ 00101 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{15}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 00101 \\ 00101 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{16}^*, \\ & \begin{pmatrix} 00101 \\ 00101 \\ 00101 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{17}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 10110 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{18}^*, \begin{pmatrix} 10110 \\ 11111 \\ 10110 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{19}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 10110 \\ 10110 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{20}^*, \begin{pmatrix} 10110 \\ 10110 \\ 10110 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{21}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00001 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{22}^*, \begin{pmatrix} 00001 \\ 11111 \\ 00001 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{23}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 00001 \\ 00001 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{24}^*, \\ & \begin{pmatrix} 00001 \\ 00001 \\ 00001 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{25}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00100 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{26}^{**}, \begin{pmatrix} 00100 \\ 11111 \\ 00100 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{27}^{**}, \begin{pmatrix} 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{28}^{**}, \begin{pmatrix} 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 11111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{29}^{**}, \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{30}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 11111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{31}^*, \begin{pmatrix} 11111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{32}^*, \\ & \begin{pmatrix} 01111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{33}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 11111 \\ 01011 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{34}^*, \begin{pmatrix} 01011 \\ 11111 \\ 01011 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{35}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{36}^*, \begin{pmatrix} 01011 \\ 01111 \\ 01111 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{37}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 01011 \\ 01011 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{38}^*, \begin{pmatrix} 01011 \\ 01011 \\ 01011 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{39}^*, \begin{pmatrix} 01111 \\ 11111 \\ 00101 \\ 01111 \\ 11111 \end{pmatrix}_{40}^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 00001 \\ 10110 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2737}^* , \begin{pmatrix} 00100 \\ 10110 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2738}^* , \begin{pmatrix} 11111 \\ 00001 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2739}^* , \begin{pmatrix} 01111 \\ 00001 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2740}^* , \begin{pmatrix} 10111 \\ 00001 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2741}^* , \begin{pmatrix} 00101 \\ 00001 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2742}^* , \begin{pmatrix} 00001 \\ 00001 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2743}^* , \begin{pmatrix} 00100 \\ 00001 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2744}^* , \\
& \begin{pmatrix} 11111 \\ 00100 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2745}^* , \begin{pmatrix} 01111 \\ 00100 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2746}^* , \begin{pmatrix} 10111 \\ 00100 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2747}^* , \begin{pmatrix} 00101 \\ 00100 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2748}^* , \begin{pmatrix} 00001 \\ 00100 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2749}^* , \begin{pmatrix} 00100 \\ 00100 \\ 00001 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2750}^* , \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2751}^{**} , \begin{pmatrix} 01111 \\ 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2752}^* , \\
& \begin{pmatrix} 10111 \\ 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2753}^{**} , \begin{pmatrix} 00101 \\ 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2754}^* , \begin{pmatrix} 10110 \\ 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2755}^{**} , \begin{pmatrix} 00100 \\ 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2756}^{**} , \begin{pmatrix} 11111 \\ 01111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2757}^{**} , \begin{pmatrix} 01111 \\ 01111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2758}^{**} , \begin{pmatrix} 10111 \\ 01111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2759}^{**} , \begin{pmatrix} 00101 \\ 01111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2760}^* , \\
& \begin{pmatrix} 10110 \\ 01111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2761}^{**} , \begin{pmatrix} 00100 \\ 01111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2762}^{**} , \begin{pmatrix} 11111 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2763}^* , \begin{pmatrix} 01111 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2764}^* , \begin{pmatrix} 10111 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2765}^{**} , \begin{pmatrix} 00101 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2766}^* , \begin{pmatrix} 10110 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2767}^* , \begin{pmatrix} 00100 \\ 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2768}^* , \\
& \begin{pmatrix} 11111 \\ 00101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2769}^* , \begin{pmatrix} 01111 \\ 00101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2770}^* , \begin{pmatrix} 10111 \\ 00101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2771}^* , \begin{pmatrix} 00101 \\ 00101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2772}^* , \begin{pmatrix} 10110 \\ 00101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2773}^* , \begin{pmatrix} 00100 \\ 00101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2774}^* , \begin{pmatrix} 11111 \\ 10110 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2775}^* , \begin{pmatrix} 01111 \\ 10110 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2776}^* , \\
& \begin{pmatrix} 10111 \\ 10110 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2777}^* , \begin{pmatrix} 00101 \\ 10110 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2778}^* , \begin{pmatrix} 10110 \\ 10110 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2779}^{**} , \begin{pmatrix} 00100 \\ 10110 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2780}^* , \begin{pmatrix} 11111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2781}^{**} , \begin{pmatrix} 01111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2782}^* , \begin{pmatrix} 10111 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2783}^{**} , \begin{pmatrix} 00101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2784}^* , \\
& \begin{pmatrix} 00101 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2785}^* , \begin{pmatrix} 10110 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2786}^{**} , \begin{pmatrix} 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix}_{2787}^{**} .
\end{aligned}$$

როგორც ჩანს 601 იდემპოტენტური და 2787 რეგულარული ელემენტია, ე.ი., თეორიული და პრაქტიკული გამოთვლები დაემთხვა ერთმანეთს.

დამატება 7

დამატება 7-ში მოცემულია მაგალითი $\Sigma_2(X, 8)$ კლასის X -ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფისა, როცა $Z_5 \cap Z_3 = \emptyset$. მოცემულ ნახევარჯგუფში ნაპოვნია ყველა იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები.

მაგალითი 7. ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ და

$$D = \{\{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი იზომორფულია მატრიცთა $B_4(D)$ ნახევარჯგუფისა, რომლის რეგულარული ელემენტებია:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \end{pmatrix}_1^{**}, \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 0111 \\ 1111 \end{pmatrix}_2^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 1111 \\ 0111 \\ 1111 \end{pmatrix}_3^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 0111 \\ 0111 \\ 1111 \end{pmatrix}_4^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 0111 \\ 0111 \\ 1111 \end{pmatrix}_5^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 1011 \\ 1111 \end{pmatrix}_6^*, \begin{pmatrix} 1011 \\ 1111 \\ 1011 \\ 1111 \end{pmatrix}_7^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 1011 \\ 1011 \\ 1111 \end{pmatrix}_8^*, \\ & \begin{pmatrix} 1011 \\ 1011 \\ 1011 \\ 1111 \end{pmatrix}_9^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 0101 \\ 0101 \\ 1111 \end{pmatrix}_{10}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 1111 \\ 0101 \\ 1111 \end{pmatrix}_{11}^*, \begin{pmatrix} 0101 \\ 1111 \\ 0101 \\ 1111 \end{pmatrix}_{12}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 0101 \\ 0101 \\ 1111 \end{pmatrix}_{13}^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 0101 \\ 0101 \\ 1111 \end{pmatrix}_{14}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 0101 \\ 0101 \\ 1111 \end{pmatrix}_{15}^*, \begin{pmatrix} 0101 \\ 0101 \\ 0101 \\ 1111 \end{pmatrix}_{16}^*, \\ & \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{17}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 1111 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{18}^*, \begin{pmatrix} 1011 \\ 1111 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{19}^*, \begin{pmatrix} 0011 \\ 1111 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{20}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 0111 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{21}^*, \begin{pmatrix} 1011 \\ 1011 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{22}^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 0011 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{23}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 0011 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{24}^*, \\ & \begin{pmatrix} 1011 \\ 0011 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{25}^*, \begin{pmatrix} 0011 \\ 0011 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}_{26}^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 1010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{27}^*, \begin{pmatrix} 1011 \\ 1111 \\ 1010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{28}^*, \begin{pmatrix} 1010 \\ 1111 \\ 1010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{29}^{**}, \begin{pmatrix} 1011 \\ 1011 \\ 1010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{30}^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 1010 \\ 1010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{31}^*, \begin{pmatrix} 1011 \\ 1010 \\ 1010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{32}^*, \\ & \begin{pmatrix} 1010 \\ 1010 \\ 1010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{33}^{**}, \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{34}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 1111 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{35}^*, \begin{pmatrix} 1011 \\ 1111 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{36}^*, \begin{pmatrix} 0101 \\ 1111 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{37}^*, \begin{pmatrix} 0011 \\ 1111 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{38}^*, \begin{pmatrix} 0001 \\ 1111 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{39}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 0001 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{40}^*, \\ & \begin{pmatrix} 1011 \\ 1011 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{41}^*, \begin{pmatrix} 0101 \\ 0101 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{42}^*, \begin{pmatrix} 0011 \\ 0011 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{43}^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 0001 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{44}^*, \begin{pmatrix} 0111 \\ 0001 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{45}^*, \begin{pmatrix} 1011 \\ 0001 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{46}^*, \begin{pmatrix} 0101 \\ 0001 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{47}^*, \begin{pmatrix} 0011 \\ 0001 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{48}^*, \\ & \begin{pmatrix} 0001 \\ 0001 \\ 0001 \\ 1111 \end{pmatrix}_{49}^*, \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 0010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{50}^{**}, \begin{pmatrix} 0111 \\ 1111 \\ 0010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{51}^*, \begin{pmatrix} 1011 \\ 1111 \\ 0010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{52}^*, \begin{pmatrix} 0011 \\ 1111 \\ 0010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{53}^*, \begin{pmatrix} 1010 \\ 1111 \\ 0010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{54}^{**}, \begin{pmatrix} 0010 \\ 1111 \\ 0010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{55}^{**}, \begin{pmatrix} 0111 \\ 0010 \\ 0010 \\ 1111 \end{pmatrix}_{56}^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1011 \\ 1011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{857}^* , \begin{pmatrix} 0101 \\ 1011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{858}^* , \begin{pmatrix} 0011 \\ 1011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{859}^* , \begin{pmatrix} 0001 \\ 1011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{860}^* , \begin{pmatrix} 0010 \\ 1011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{861}^* , \begin{pmatrix} 0101 \\ 0101 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{862}^* , \begin{pmatrix} 1111 \\ 0011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{863}^* , \begin{pmatrix} 0111 \\ 0011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{864}^* , \\
& \begin{pmatrix} 1011 \\ 0011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{865}^* , \begin{pmatrix} 0101 \\ 0011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{866}^* , \begin{pmatrix} 0011 \\ 0011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{867}^* , \begin{pmatrix} 0001 \\ 0011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{868}^* , \begin{pmatrix} 0010 \\ 0011 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{869}^* , \begin{pmatrix} 1111 \\ 1010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{870}^* , \begin{pmatrix} 0111 \\ 1010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{871}^* , \begin{pmatrix} 1011 \\ 1010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{872}^* , \\
& \begin{pmatrix} 0101 \\ 1010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{873}^* , \begin{pmatrix} 0011 \\ 1010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{874}^* , \begin{pmatrix} 1010 \\ 1010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{875}^* , \begin{pmatrix} 0001 \\ 1010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{876}^* , \begin{pmatrix} 0010 \\ 1010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{877}^* , \begin{pmatrix} 1111 \\ 0001 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{878}^* , \begin{pmatrix} 0111 \\ 0001 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{879}^* , \begin{pmatrix} 1011 \\ 0001 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{880}^* , \\
& \begin{pmatrix} 0101 \\ 0001 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{881}^* , \begin{pmatrix} 0011 \\ 0001 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{882}^* , \begin{pmatrix} 0001 \\ 0001 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{883}^* , \begin{pmatrix} 0010 \\ 0001 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{884}^* , \begin{pmatrix} 1111 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{885}^* , \begin{pmatrix} 0111 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{886}^* , \begin{pmatrix} 1011 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{887}^* , \begin{pmatrix} 0101 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{888}^* , \\
& \begin{pmatrix} 0011 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{889}^* , \begin{pmatrix} 0001 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{890}^* , \begin{pmatrix} 0010 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0010 \end{pmatrix}_{891}^* , \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{892}^{**} , \begin{pmatrix} 0111 \\ 1111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{893}^* , \begin{pmatrix} 1011 \\ 1111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{894}^{**} , \begin{pmatrix} 0011 \\ 1111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{895}^* , \begin{pmatrix} 1010 \\ 1111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{896}^{**} , \\
& \begin{pmatrix} 0010 \\ 1111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{897}^{**} , \begin{pmatrix} 1111 \\ 0111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{898}^{**} , \begin{pmatrix} 0111 \\ 0111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{899}^{**} , \begin{pmatrix} 1011 \\ 0111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{900}^{**} , \begin{pmatrix} 0011 \\ 0111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{901}^* , \begin{pmatrix} 1010 \\ 0111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{902}^{**} , \begin{pmatrix} 0010 \\ 0111 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{903}^{**} , \begin{pmatrix} 1111 \\ 1011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{904}^* , \\
& \begin{pmatrix} 0111 \\ 1011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{905}^* , \begin{pmatrix} 1011 \\ 1011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{906}^{**} , \begin{pmatrix} 0011 \\ 1011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{907}^* , \begin{pmatrix} 1010 \\ 1011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{908}^* , \begin{pmatrix} 0010 \\ 1011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{909}^* , \begin{pmatrix} 1111 \\ 0011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{910}^* , \begin{pmatrix} 0111 \\ 0011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{911}^* , \begin{pmatrix} 1011 \\ 0011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{912}^* , \\
& \begin{pmatrix} 0011 \\ 0011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{913}^* , \begin{pmatrix} 1010 \\ 0011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{914}^* , \begin{pmatrix} 0010 \\ 0011 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{915}^* , \begin{pmatrix} 1111 \\ 1010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{916}^* , \begin{pmatrix} 0111 \\ 1010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{917}^* , \begin{pmatrix} 1011 \\ 1010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{918}^* , \begin{pmatrix} 0011 \\ 1010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{919}^* , \begin{pmatrix} 1010 \\ 1010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{920}^{**} , \\
& \begin{pmatrix} 0010 \\ 1010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{921}^* , \begin{pmatrix} 1111 \\ 0010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{922}^{**} , \begin{pmatrix} 0111 \\ 0010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{923}^* , \begin{pmatrix} 1011 \\ 0010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{924}^{**} , \begin{pmatrix} 0011 \\ 0010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{925}^* , \begin{pmatrix} 1010 \\ 0010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{926}^{**} , \begin{pmatrix} 0010 \\ 0010 \\ 0010 \\ 0010 \end{pmatrix}_{927}^{**} .
\end{aligned}$$

როგორც ჩანს 217 იდემპოტენტური და 927 რეგულარული ელემენტია, ე.ი., თეორიული და პრაქტიკული გამოთვლები დაემთხვა ერთმანეთს.

ლიტერატურა

1. Avaliani Z., Complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 2, 2001, 223–224.
2. Avaliani Z., The idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 3, 2001, 440–442.
3. Avaliani Z., Regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattice of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 2, 2002, 254–255.
4. Avaliani Z., The number of regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, 472–473.
5. Avaliani Z., Maximal subgroups of a class of semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 103.
6. Avaliani Z., Sh. Makharadze, Maximal subgroups of some classes of semigroups of binary relations. Georgian Math J., 11, no. 2, 2004, 203–207.
7. Avaliani Z., Formulas for Calculation of Regular Elements of the Semigroups $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_1(X,5)$. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 211, Issue 1, November 2015, pp. 3-12.
8. Clifford A., Preston G., Algebraic theory of semigroups. Mir, Moscow, 1972 (translated from English).
9. Clifford A.H., Union and symmetry preserving endomorphisms of the semigroup of all binary relations on a set. Czechoslovak Math. J., 20, no. 95, 1970, 303–314.
10. Devadze Kh. M., Generating sets of some subsemigroups of the semigroup of all binary relations in a finite set. Proc. A.I. Herzen Leningrad State Polytechn. Inst., 387, 1968, 92–100 (in Russian).
11. Devadze Kh.M., A semigroup generated by the set of all equivalence relations in a finite set. XIth All-Union Algebraic Colloquium, Abstracts of Reports, 1971, Kishinev. 193–194 (in Russian).
12. Devadze Kh.M., Generating sets of the semigroup of all binary relations in a finite set. Doklady AN BSSR, 12, no. 9, 1968, 765–768 (in Russian).
13. Diasamidze Ya.I., On idempotent binary relations. XIIth All-Union Algebraic Colloquium, Sverdlovsk, part II, 1973 (in Russian).
14. Diasamidze Ya.I., Some semigroups generated by idempotent binary relations. In the collection: Sovremennaya Algebra, no.3, 1975, Leningrad, 36–51 (in Russian).
15. Diasamidze Ya.I., Green relations on the semigroup generated by all diagonal idempotent relations. All-Union Algebraic Symposium, Gomel, part I, 1975 (in Russian).
16. Diasamidze Ya.I. On the semigroup of binary relations. In the collection: Gertsenovsk. Chteniya, Matematika, 1976, Leningrad, 5–8 (in Russian).
17. Diasamidze Ya.I., Green relations on the semigroup generated by all almost diagonal idempotent relations. In the collection of works: Sovrem Algebra, no. 4, 1976, Leningrad, 57–65.
18. Diasamidze Ya.I., Description of all minimal left (right) idempotent divisors of almost diagonal relations. In the collection: Sovrem. Algebra, no. 5, 1976, Leningrad, 40–46 (in Russian).
19. Diasamidze Ya.I., On reducible and irreducible binary relations. Xth Conf. Mathem. Higher Educat. Establishments Georgian SSR, Abstracts of Reports, Telavi, 1983 (in Russian).
20. Diasamidze Ya.I., Construction of idempotent binary relations. 45th Scientific Conference. Abstracts of Reports, Batumi, 1988 (in Russian).
21. Diasamidze Ya.I., On unilateral zeros of subsets of the semigroup of binary relations. Ukrainian Math. J., 42, no. 5, 1990, 600–604 (in Russian).
22. Diasamidze Ya.I., On unilateral units of subsets of the semigroup of binary relations. Ukrainian Math. J., 42, no. 8, 1990, 1026-1031 (in Russian).
23. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Irreducible generating sets of some idempotently generated subsemigroups of the semigroup of all binary relations. Batumi, 1996, 1–31 (in Russian).
24. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Right zeros of complete semigroups of binary relations. Proc. Shota Rustaveli Batumi State Univ., no. 2, Batumi, 1998, 39–42.
25. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., A general characterization of semigroups the class $\Sigma(X,2)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 2, 1999, 198–200.
26. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Right zeros of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 3, 1999, 376–378.
27. Diasamidze Ya.I., Complete semigroups of binary relations. Ajara Publ. House, Batumi, 2000, 1–176 (in Russian).

28. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Diasamidze I.Ya., Complete semigroups of binary relations defined by nodal X – semilattices of unions. Proc. Shota Rustaveli Batumi State Univ., Batumi, 2001, 28–49 .
29. Diasamidze Ya., Divisibility of elements in complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 2, 2001, 225–227 .
30. Diasamidze Ya., Right units and idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 3, 2001, 443–446 .
31. Diasamidze Ya., Maximal submonoids and maximal subgroups of complete semigroups of binary relations. Proc. IIIrd Congress of Mathematicians of Georgia, Tbilisi, 2001.
32. Diasamidze Ya., Complete semigroups of binary relations with unique right units. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 1, 2001, 18–21 .
33. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Complete semigroups of binary relations defined by elementary and nodal X – semilattices of unions. Itogi Nauki I Tekjniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, Algebra, 81, no. 19, 2001 (in Russian).
34. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete X – semilattices generated by sets of nonchainwise pairs. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, 477–479 .
35. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete X – semilattices generated by sets of pairwise nonintersecting sets. Bull. Georgian Acad. Sci., 166, no. 1, 2002, 23–26 .
36. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete X – semilattices generated by chains. Bull. Georgian Acad. Sci., 166, no. 2, 2002.
37. Diasamidze Ya., To the theory of semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 128, 2002, 1–15 .
38. Diasamidze Ya., Right units in the semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 128, 2002, 17–36 .
39. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Complete semigroups of binary relations defined by elementary and nodal X – semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, 111, no.1, 2002, Plenum Publ. Corp., New York, 3171–3226 .
40. Diasamidze Ya.I., Sirabidze T., Complete semigroups of binary relations defined by three-element X – chains. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematic Surveys, 98, 2002 (in Russian).
41. Diasamidze Ya.I., Complete semigroups of binary relations. Itogi Nauki I Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematic Surveys, 98, 2002 (in Russian).
42. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Semigroups $B_X(D)$ defined by finite X – chains. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 107–108 .
43. Diasamidze Ya.I., Irreducible elements of the semigroup. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 109–110 .
44. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Maximal subgroups of complete semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 21–38 .
45. Diasamidze Ya.I., Sirabidze T., Complete semigroups of binary relations defined by three-element X – chains. Journal of Mathematical Sciences, 117, no. 4, 2003, Plenum Publ. Corp., New York, 2003, 4320–4350 .
46. Diasamidze Ya., Complete semigroups of binary relations. Journal of Mathematical Sciences, 117, no. 4, 2003, Plenum Publ. Corp., New York, 4271–4319 .
47. Diasamidze Ya.I., Diasamidze I., Complete semigroups of binary relations defined by finite X – chains. Proc. Batumi State Univ., no. 4, 2003, 3–36 .
48. Diasamidze Il., Semigroups $B_X(D)$ defined by finite X – chains. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 105–106 .
49. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite X – semilattices of unions. Bull. Georgian Acad. Sci., 169, no. 2, 2004, 263–266 .
50. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., Description of the class $\Sigma(X, m)$ (m is a finite number). Bull. Georgian Acad. Sci., 169, no. 3, 2004, 463–465 .
51. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Classes of complete semigroups of binary relations. International Algebraic Conference. Abstracts of Reports, Moscow, 2004, 44–45 .
52. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite X – semilattices of unions. Modern Mathematics and its Applications, Algebra and Geometry, v. 27, Tbilisim 2005, 46–94 .
53. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite X – semilattices of unions. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 141, № 4, 2007, 1134-1181.
54. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., Complete Semigroups of Binary Relations whose Set of all Idempotents is a Semigroup. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 1 (175), no. 4, 2007, 31–35 .

55. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Diasamidze Il., Idempotents and regular elements of complete semigroups of binary relations. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 153, no. 4, 2008, 481–499 .
56. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., On XI – Semilattices of Unions. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 2 , no. 1, 2008, 16 – 24 .
57. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., Complete Semigroups of Binary Relations whose Set of Regular Elements is a Semigroup. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 2, no. 2, 2008, 9–15 .
58. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete semigroup of binary relations. Fundamental and application mathematic. 2008, 14, no. 8, 73-99.
59. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete Semigroups of Binary Relations defined by X – Semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, New York, Vol. 166, no. 5, 2010, 615–633 .
60. Diasamidze Ya., The property of right units of complete semigroups of binary relations defined finite XI – semilattices of unions. Proceedings of the international conference “Modern algebra and its applications” . Batumi, Georgia, 2010, 38–40 .
61. Diasamidze Ya., Erdogan A., Chimen N., Idempotent elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_6(X,7)$. Proceedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2010, 41–55 .
62. Diasamidze Ya., makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations defined finite XI – semilattices of unions. Proceedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2010, 56–58 .
63. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations. Sputnik +, Moscow, 2010, 1–657 (in Russian).
64. Diasamidze Ya., Complete XI – semilattices of unions. Proceedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2011, 48–52 .
65. Diasamidze Ya., Erdogan A., Chimen N., Regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_6(X,7)$. Proceedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2011, 53–68 .
66. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Right units and there number of the complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class nets. Proceedings of the international conference “Modern algebra and its applications”. Batumi, Georgia, 2011, 69–72 .
67. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Idempotent elements of complete semigroups of binary relations defined by the finite X – semilattices of the rooted tree class. Abstracts II international conference. 2011, Batumi, Georgia, 81–82 .
68. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations. Istanbul, , 2013, 1–519 (in English). www.kriteryayinvery.com info@kriteryayinevy.com kriteryayin@gmail.com (Monograph).
69. Diasamidze Ya. and Tavdgiridze Giuli. Some Regular Elements, Idempotents and Right Units of Semigroup $B_X(D)$ Defined by X – Semilattices which is union of a Chain and two Rhombus. Journal of Gen. Math. Notes, vol. 26, No 1, 2015, pp. 84-101. www.i-csrs.org <http://www.geman.in>
70. Diasamidze Ya and Tavdgiridze Giuli, Some Regular Elements, Idempotents and Right Units of Semigroup $B_X(D)$ Defined by X – Semilattices which is union of a Two Rhombus and Chain. International Journal of Scietific Enginering and Applied Science (IJSEAS) - vol. 1, No 1, Issue -7, October 2015, pp. 548-556. www.ijseas.com
71. Diasamidze Ya. and Bakuridze A. On Some Properties of Regular Elements of Complete Semigroups Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_4(X,8)$. (IJESIT) International Journal of Engineering science and Inovate Technology, Vol. 4, Issue 4, july 2015, pp. 8-15. <http://www.ijesit.com/archive/23/volume-4issue-4-july.2015.html>
72. Diasamidze Ya, Makharadze Shota, Aydin Neşet, Erdogan Ali. Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class Z – Elementary X – Semilattice of Unions. Sarajevo Journal of Mathematics, Vol. 11 (23), No. 1, (2015),17-35.
73. [Diasamidze](#) Yasha, Erdogan Ali, Aydin Neşet, Some Regular Elements, Idempotents and Right Units of Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class Lower Icomplete Nets. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 93, No. 4 2014, 549-566.
74. [Diasamidze](#) Yasha, Albayrak Barış, Aydin Neşet, Regular Elements of the Complete Semigroups of Binary Relations of the Class $\Sigma_7(X,8)$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 86, No. 1 2013, 199-216.

75. Diasamidze Ya. and Bakuridze A. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_4(X,8)$ and their Calculation Formulas, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 165 (2014), 41-66.
76. Diasamidze Ya. and A. Bakuridze. On Idempotent Elements of the Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of Unions, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 166 (2014), 9-30.
77. [Diasamidze](#) Ya., [Makharadze](#) Sh., [Rokva](#) N., Right Units in Complete Semigroups of Binary Relations. [Journal of Mathematical Sciences](#). September 2013, Volume 193, [Issue 3](#), pp 401-403.
78. Givradze O., Some properties of the semigroup $B_X(D)$ defined by a semilattice of the class $\Sigma_1(X,4)$. Bull Georgian Acad. Sci., 167, no. 1, 2003, 43–46.
79. Givradze O., Some properties of the semigroup $B_X(D)$ defined by a semilattice of the class $\Sigma_1(X,4)$. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 117–120.
80. Givradze O., The number of equivalences on a finite set. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 121–122.
81. Givradze Omar. Irreducible Generating Sets of Complete Semigroups of Unions. [Journal of Mathematical Sciences](#): March 2014, Vol. 197, [Issue 6](#), pp 755-760. <http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-014-1759-5>
82. Khiladze D., Semigroups $BX(D)$ defined by semilattices of the classes $\Sigma_3(X,4)$ and $\Sigma_4(X,4)$. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 137–138.
83. Kuratovski K., Mostovski A., Theory of sets. Mir, Moscow, 1970 (in Russian).
84. Kenneth D. Magill, Jr., Automorphisms of the semigroup of all relations on a set. Candian Math. Bull., 9, no. 1, 1966, 73–77.
85. Makharadze Sh.I., Divisibility, Green relations and regular elements of the semigroup $\theta_X^{(r)}(\alpha)$. Batumi Univ. Press, Batumi, 1997, 1–23.
86. Makharadze Sh., On the theory of the semigroup of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 2, 1999, 205–208.
87. Makharadze Sh., Maximal idempotent groups in the binary relation semigroup. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 3, 1999, 373–375.
88. Makharadze Sh., Remarks on the theory of binary relation semigroup. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 121, 1999, 109–116.
89. Makharadze Sh.I., Maximal idempotent semigroups from $\theta_X^{(r)}(\omega_{X_1, X_2})$. Proc. Batumi State Univ., no. 2, Batumi, 1998, 33–38.
90. Makharadze Sh.I., Semigroups of binary relations with right units. Ajara, Batumi, 2001, 1–153.
91. Makharadze Sh., Semigroups of binary relations with right units. International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications and Poster Sessions, Beijing 2002, 27.
92. Makharadze Sh., Diasamidze I., Characteristic sets of complete X – semilattices of unions. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, 474–476.
93. Makharadze Sh., Regular elements of semigroups $B_X(D)$ defined by generalized elementary X – semilattices. Intellect, periodic scientific journal, no. 3(14), 2002, Tbilisi, 21–26.
94. Makharadze Sh., Maximal subgroups of some classes of complete semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 143–144.
95. Makharadze Sh., Regular elements of the semigroup $B_X(D)$ determined by the generalized elementary X – semilattices. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 145–147.
96. Makharadze Sh.I., Semigroups of binary relations with right units. Itogi Nauki i Tekhniki. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, 98, 2002 (in Russian).
97. Makharadze Sh.I., Semigroups of binary relations with right units. Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publ. Corp., New York, 117, no. 4, 2003, 4351–4392.
98. Makharadze Sh.I., Diasamidze I.Ya., One class of complete semigroups of binary relations. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, 98, 2002 (in Russian).
99. Makharadze Sh.I., Diasamidze I.Ya., One class of complete semigroups of binary relations. Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publ. Corp., New York, 117, no. 4, 2003, 4393–4424.
100. Makharadze Sh., Bakuridze A., Complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class X . Bull. Georgian Acad. Sci., 170, no. 3, 2004, 462–465.
101. Makharadze Shota, Aydin Neşet, Erdogan Ali. Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_1(X,10)$. Applied Mathematics, 2015, 6, 274-294. <http://www.scirp.org/journal/am>
<http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.62026>

102. Partenadze G., Semigroups $B_X(D)$ defined by complete X -semilattices of the class $\Sigma_1(X,6)$. Proc. A.Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 116.
103. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the semigroup of all binary relations. Trans. A.I. Herzen Leningrad State Polytechn. Inst., 183, 1958, 251–263 (in Russian).
104. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the semigroup of all reflective binary relations. Trans. A.I. Herzen Leningrad State Polytechn. Inst., 1958, 265–269 (in Russian).
105. Zaretskii K. A., Representation of ordered semigroups of binary relations. Izv. Vish. Uchebn. Zaved. Matematika, 6, 1959, 48–50 (in Russian).
106. Zaretskii K. A., Regular elements of the semigroup of binary relations. Uspekhi Mat. Nauk, 17, no. 3, 1962, 177–189 (in Russian).
107. Zaretskii K. A., A semigroup of binary relations. Matem. Sbornik, 61, no.3, 1963, 291–305 (in Russian).
108. Zaretskii K. A., A semigroup of completely effective binary relations. In the collection: Theory of Semigroups and Its Applications, I, 1965, Saratov University Press, 1965, 238–250 (in Russian).
109. Zaretskii K. A., On the ideals of semigroups. Uspekhi Mat. Nauk, 14, no. 6, 1959, 173–174 (in Russian).
110. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the class of semigroups of partially reflective binary relations. Sibirsk. Mat. Zh., 8, no. 6, 1967 (in Russian).
111. Zaretskii K. A., On monogenic semigroups of binary relations. Izv. Vish. Uchebn. Zaved. Matematika, 131, no. 4, 1973, 15–20 (in Russian).
112. Zaretskii K. A., Maximal submonoids of the semigroup of binary relations. Semigroup Forum, 9, no. 5, 1974, 196–208.
113. Zaretskii K. A., On congruences on the semigroup of binary relations. Associative Actions. Leningrad, 1983, 30–39 (in Russian).
114. Zaretskii K. A., Maximal regular subsemigroups of the semigroup of binary relations. Associative Actions, Leningrad, 1983, 40–46.
115. Zaretskii K. A., Equiprojective idempotent binary relations. Teoriya polugrupp i ee Prilozheniya, 5, Saratov Univ. Press, 1985, 29–31 (in Russian).
116. Zaretskii K. A., On partial congruences on the semigroup of binary relations. Teoriya polugrupp i ee Prilozheniya, 7, 1984, Saratov Univ. Press, 16–23 (in Russian).
117. Zaretskii K. A., Lattices of the sections of binary relations. Uporyadoch. Mnozhestva i Reshetki, 9, 1986, Saratov Univ. Press, 24–33 (in Russian).
118. Tavdgiridze Giuli and Diasamidze Ya. Regular Elements and Right Units of Semigroup $B_X(D)$ Defined Semilattice D for which $V(D, \alpha) = Q = \Sigma_3(X, 8)$, Journal of Applied Mathematics, 6, 2015, 373-381. <http://www.scirp.org/journal/am> <http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.62035>
119. Tavdgiridze Giuli and Diasamidze Ya. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_3(X, 8)$, when $Z_7 \neq \emptyset$. IJSET-International Journal of Inovative Sciece, Engineering and Technology, Vol. 2, Issue 11, November 2015, 797-806. www.ijiset.com
120. Tavdgiridze Giuli. Maximal Subgroups of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_3(X, 8)$. Gen. Math. Notes. Vol. 27, No. 1, March 2015, pp 69-89. www.i-csrs.org <http://www.geman.in>
121. Tavdgiridze Giuli, Diasamidze Yasha, Givradze Omari. Idempotent Elements of the Semigroups $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_3(X, 8)$ When $Z_7 \neq \emptyset$. Applied Mathematics Vol.7 No.3, Pub. Date: February 25, 2016. <http://www.scirp.org/journal/PaperInformation.aspx?PaperID=63809>

სადოქტორო ნაშრომში მიღებული შედეგები ასახულია
შემდეგ სამეცნიერო შრომებში

1. **Tsinaridze Nino**. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X, 8)$, when $Z_7 \cap Z_6 \neq \emptyset$. **IJISSET** – International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology, Vol. 3 Issue 1, January 2016, 162-171. www.ijiset.com;
2. **Tsinaridze Nino**, Makharadze Shota. Regular Elements of the Complete Semigroups $B_X(D)$ of Binary Relations of the Class $\Sigma_2(X, 8)$. **Applied Mathematics**, 2015, 6, 447-455. www.scirp.org/journal/am <http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.63042>;
3. **Tsinaridze Nino**. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X, 8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$. **Gen. Math. Notes**. Vol. 27, No. 2, April 2015, pp. 17-36. www.i-csrs.org <http://www.geman.in>;
4. **Tsinaridze Nino**, Makharadze Shota, Fartenadze Guladi. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X, 8)$ and Their Calculation Formulas. **Applied Mathematics**, 2015, 6, 2257-2278. <http://www.scirp.org/journal/am> <http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.614199>;
5. **Tsinaridze Nino**, Diasamidze Yasha. Maximal Subgroups of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X, 8)$. **IJESIT**- International Journal of Engineering Science and Innovative Technology, Vol. 4, Issue 6, November 2015, pp. 61-74. <http://www.ijesit.com/archive/25/volume-4-issue-6november-2015.html>;
6. **Tsinaridze Nino**. Subsemilattice of a Semilattice of Class $\Sigma_2(X, 8)$. **Journal of Mathematical Sciences** Vol. 191, No. 6, June, 2013, pp. 871-875. <http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-013-1367-9>;
7. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino**. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of The Class $\Sigma_2(X, 8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \emptyset$ and their calculation Formulas. **International Journal of Pure Mathematical Sciences** ISSN: 2297-6205. Vol. 16, pp 1-23. doi:10.18052/www.scipress.com/IJPMS.16.1.

გარდა ზემოთ აღნიშნული ნაშრომებისა გამოქვეყნებულია ორი ნაშრომი:

8. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino**, Aidn Neset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X, 10)$ -I. **Applied Mathematics**, 2016, 7, 867-893, www.scirp.org/journal/am <http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.79078>;
9. Diasamidze Yasha, **Tsinaridze Nino**, Aidn Neset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X, 10)$ -II. **Applied Mathematics**, 2016, 7, 894-907, www.scirp.org/journal/am <http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.79079>;