ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელნაწერის უფლებით

რუსლან ცინარიძე

ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის შესახებ

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის ანოტაცია

სპეციალობა-მათემატიკა

ბათუმი
2016

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ვლადიმერ ბალაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

უცხოელი შემფასებლები:

ალექსანდრე შოსტაკი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ლატვიის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპოდენტი, ლატვიის უნივერსიტეტი

სერგეი ანტონიანი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, მექსიკის მეცნიერებათა აკადემიის რეგულარული წევრი, მექსიკის ეროვნული ავტონომიური უნივერსიტეტი

შემფასებლები:

ლეონარდ მძინარიშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მალხაზ ბაკურაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოც. პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ანზორ ბერიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოც. პროფესორი, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სადისერტაციო ნაშრომის დაცვა შედგება 2017 წლის 3 თებერვალს, 16^{00} საათზე, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე.

მისამართი: ბათუმი, ნინოშვილის ქ.№35, უნივერსიტეტის პირველი კორპუსი, მესამე სართული, დარბაზი №55.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში და ვებ-გვერდზე www.bsu.edu.ge

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული მდივანი,
ასოცირებული პროფესორი დალი მახარაძე

[Mor] K. Morita, On shapes of topological spaces. Fund. Math., 86 (1975), 251-259.

[M-S$_1$] S. Mardešic and J. Segal, Shapes of compacta and ANR-systems, Fund. Math. 72 (1971), 41-59.

[M-S$_2$] S. Mardešic and J. Segal, Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes,Fund. Math., 72 (1971), 61-68.

[M-S$_3$] S. Mardešic and J. Segal, Shape Theory, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[M-Š] S. Mardešic and A. Šostak, On the homotopy type of ANR's for p-paracompacta, Bull. Acad.Polon. Sei. Ser. Sei. Math. Astronom. Phys., 27 (1979), 803-808.

[Md] L. D. Mdzinarishvili, Application of the shape theory in the characterization of exact homology theories and the strong shape homotopic theory. Lecture Notes in Mathematics, Shape Theory and Geometric Topology, 870 (1981), 253-262

[N-S] G.M.Nepomniachy and Ju. M.Smirnov, On retraction of mappings. (Russian) Chechoslovak Math. J., 29 (1979), 366-377.

[Nh] Nguen To Nho, Shape of metric space in the category of metric space and uniformly of continuous maps, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys., (27)1979, 929-934.

[Po] M. M. Postnikov, Lectures on Algebraic Topology, Nauka, Moscow, 1984.

[Q] J.B.Quigley, An exact sequence from the n-th to (n-1)-th fundamental group, Fundam. Math.,76(1972),181-196.

[Sa] K. Sakai, Proper n-shape category, Glasnik Matematicki, 33(1998), 287-297.

[Sm$_1$] Yu.M. Smirnov, Shape theory and continuous transformations groups, Uspekhi Mat. Nauk, 34 (1979),119-123.

[Sm$_2$] Yu. M. Smirnov, Equivariant shapes, Serdika, 10 (1984), 223-228.

[Sm$_3$] Yu. M. Smirnov, Shape theory for G-pairs, Uspekhi Mat. Nauk, 40(1985),151-165.

[Sp] E.H. Spanier, Algebraic Topology. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics,1966.

[St] L. Stramaccia, On the definition of the strong shape category. Glassnik math., 32(1997), 141-151.

[U] G.S. Ungar, ANR's and NES's in the category of mappings of metric spaces. Fund. Math., 95 (1977), 111-127.

[W] T.Watanabe, Approximative shape I, Tsukuba J.Math., 11(1987), 17-59.

[Y$_1$] T. Yagasaki, Movability of maps and shape fibrations. II, Tsukuba J. Math., 9(1985), 279-287.

[Y$_2$] T. Yagasaki, Fiber shape theory, Tsukuba J. Math., 9(1985), 261-277.

[Y$_3$] T. Yagasaki, Movability of maps and shape fibrations, Glas. Mat., Ser., 21(1986), 153-177.

[Y$_4$] T. Yagasaki, Fiber shape theory, shape fibrations and movability of maps, Lecture Notes in Math. 1283, Springer, Berlin, (1987), 240-252.

[G$_2$] P. S. Gevorgyan, Generalized shape theory and movability of continuous transformation groups, Dissertation, MSU, 2001.
[G$_3$] P. S. Gevorgyan, Yu.M. Smirnov's general equivariant shape theory, Topology and its Applications, 160(2013), 1232-1236.
[H] H. M. Hastings, Shape theory and dynamical systems, In The structure of attractors in dynamical systems, Lecture Notes in Math., 668(1978), 150-160.
[Hu] S. T. Hu, Theory of Retracts, Wayne St. Univ. Press, Detroit, 1965.
[I-Sa] Y.Iwamoto and K. Sakai, Strong n-shape theory, Topology and its Applications, Topology and its Applications, 122 (2002), 253–267.
[J$_1$] I. M. James, General Topology and Homotopy Theory, Springer, 1984.
[J$_2$] I. M. James, Fibrewise Topology. Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1989.
[Ji-R] R.M.Jimenez and L.R.Rubin, The existence of n-shape theory for arbitrary compacta, Glasnik.Math., 33(1998),123-132.
[K$_1$] H. Kato, Fiber shape categories, Tsukuba J. Math., 5(1981), 247-265.
[K$_2$] H.Kato, Shape fibrations and fiber shape equivalences I, Tsukuba J. Math.,5(1981), 223-235.
[K$_3$] H.Kato, Shape fibrations and fiber shape equivalences II,ibid., (1995),237-246.
[K$_4$] H.Kato, Fiber shape categories,Tsukuba J. Math., 9(1985),247-265.
[Ki] Nguyen Anh Kiet, Uniform fundamental classification of complete metric spaces and uni- formly continuous mappings Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys., 23 (1975),55-59.
[Ko-O] Y. Kodama and J. Ono, On fine shape theory, Fund. Math., 105 (1979),29-39.
[L$_1$] T. Lisica, On the exactness of the spectral homotopy group sequence in shape theory, Soviet. Math. Dok., 18 (1977), 1186-1190.
[L$_2$] T. Lisica, Cotelescopes and the theorem of Kuratowsky-Dugundji in shape theory, Soviet. Math. Dokl., 5(1982), 1064-1068.
[L$_3$] T. Lisica, Strong shape theory and the Steenrod-Sitnikov homology. (Russian) Sibirsk. Mat. Ž.,24 (1983), 81-99.
[L$_4$] Ju.T. Lisica, Strong shape theory and multivalued maps, Glasnik Mat., 18(1983), 371-382.
[L-M] J.T. Lisica, S. Mardešic´, Coherent prohomotopy and strong shape theory, Glasnik Mat., 19(1984), 335–399.
[M$_1$] S. Mardešic´, Shapes of topological spaces. General Topology Appl., 3 (1973), 265-282.
[M$_2$] S. Mardešic´, Resolutions of spaces are strong expansions, Publication D'Institut, Mat., 49 (1991), 179-188.
[M$_3$] S. Mardešic´, Strong Shape and Homology, Springer, 2000.
[Mi$_1$] T. Miyata, Uniform shape theory, Glas. Mat. Ser., 29(1994), 123-168.
[Mi$_2$] T. Miyata, Homology, cohomology and uniform shape, Glasnik Mat.,30(1995), 85-109.
[Mi-S] T. Miyata and J. Segal, Shape and uniform properties of hyperspaces of noncompact spaces,Glasnik Matematicki, 32 (1997), 99-124.
[Mi-W] T. Miyata and T. Watanabe, Approximate resolutions of uniform spaces, Topology Appl.,113(2001), 211-241.
[Mim] Z. Miminoshvili, On a strong spectral shape theory (Russian), Trudy Tbilissk. Mat. Inst. AkadNauk Gruzin. SSR, 68(1982), 79-102.

შეიპების თეორიის თანამედროვე მდგომარეობა და თემის აქტუალობა

შეიპური თეორია არის გეომეტრიული ტოპოლოგიის მნიშვნელოვანი და გამოყენებების თვალსაზრისით მდიდარი დარგი. ის არის ANR-სივრცეთა, პოლიედრთა და სიმპლიციალურ კომპლექსთა ჰომოტოპიური ტიპის მქონე სივრცეთა ჰომოტოპიის თეორიის შინაარსიანი გაგრძელება უფრო ზოგად სივრცეთა კატეგორიებამდე.

შეიპური ტიპის თეორიები, რომელთათვისაც სამართლიანია კლასიკური შეიპური თეორიის რიგი შედეგები, არსებით როლს თამაშობენ თანამედროვე ტოპოლოგიაში, სისტემატურად მატულობს როგორც მათი რიცხვი, ისე მათი მეთოდების მნიშვნელობა ტოპოლოგიის სხვადასხვა დარგებში (ჰომოლოგიის თეორია, ჰომოტოპიის თეორია, რეტრაქტების თეორია, განზომილების თეორია, დინამიკური სისტემები, C^*-ალგებრები და სხვა) აღმოცენებული პრობლემების შესწავლისას.

თავდაპირველად შეიპური თეორია აგებული იქნა კ.ბორსუკის მიერ კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეთა კატეგორიისათვის, შემდეგ კი მეტრიზებად სივრცეთა კატეგორიისთვის ასახვათა ფუნდამენტური მიმდევრობების მეშვეობით ([Bo$_2$]-[Bo$_4$]).

ს.მარდეშიჩმა და ჯ.სეგალმა სივრცეთა შებრუნებული სისტემებით აპროქსიმაციის მეშვეობით ბორსუკის შეიპური თეორია გააგრძელა კომპაქტურ ჰაუსდორფის სივრცეთა კატეგორიამდე ([M-S$_1$]-[M-S$_3$]). ამის შემდეგ, იმავე გზით, რ.ჩ.ფოქსმა ბორსუკის თეორია გაავრცელა მეტრიზებად სივრცეთა კატეგორიაზე [Fo]. შეიპური თეორიის სხვა განზოგადება აღწერილი იქნა ბ.ჯ.ბოლის და რ.ბ.შერის მიერ [Ba-Sh], როცა მათ ააგეს საკუთრივი შეიპური თეორია ლოკალურად კომპაქტური სეპარაბელური სივრცეების და საკუთრივი ასახვების კატეგორიისათვის. გარდა ამისა, ბ.ჯ.ბოლმა [Ba] საკუთრივი შეიპური თეორია გამოიკვლია ლოკალურად კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების და საკუთრივი ასახვების კატეგორიისათვის, ხოლო ვ.ბალაძემ [B$_7$] ლოკალურად კომპაქტურ პარაკომპაქტურ სივრცეთა და საკუთრივ ასახვათა კატეგორიისთვის. პარაკომპაქტურ და p-პარაკომპაქტურ სივრცეთა

შეიპური კლასიფიკაციები აღწერილი იქნა ა.შოსტაკის [Š] და ს.მარდეშიჩისა და ა.შოსტაკის [M-Š] მიერ. ნებისმიერ ტოპოლოგიურ სივრცეთა კატეგორიისათვის შეიპური თეორია განვითარებული იქნა კ.მორიტას [Mor] და ს.მარდეშიჩის [M_1] მიერ.

შეიპების თეორიის კატეგორიული ასპექტები შესწავლილ იქნა ჯ.მ.კორდიეს და ტ. პორტერის მიერ [Co-P].

აბსოლუტური მიდამოებრივი თანაბარი რეტრაქტების თანაბარი ჰომოტოპიის თეორიის, აბსოლუტური მიდამოებრივი ექვივარიანტული რეტრაქტების ექვივარიანტული ჰომოტოპიის თეორიის და აბსოლუტური მიდამოებრივი რეტრაქტების n-ჰომოტოპიის თეორიის შეიპური ტიპის გაფართოებები აგებულ და გამოკვლეულ იქნა მრავალი ავტორის მიერ.

თანაბარ სივრცეთა კატეგორიისათვის თანაბარი შეიპური თეორია განვითარებულ იქნა აგარონიანისა და სმირნოვის [A-S], ვ.ბალაძის ([B_8],[B_9],[B_{11}]), ვ.ბალაძისა და ლ.თურმანიძის ([B-Tu_1],[B-Tu_2]), დ. დოიჩინოვის ([Do_1]-[Do_3]), ნგუენ ანჰ კიეტის [Ki], ტ.მიუატას ([Mi_1]-[Mi_2]), ტ.მიუატასა და ჯ.სეგალის [Mi-S], ტ.მიუატასა და ტ.ვატანაბეს [Mi-W] და ნგუენ ტუ ნჰუს [Nh] მიერ.

ტოპოლოგიური ჯგუფების მოქმედების მქონე სივრცეთა ექვივარიანტული შეიპური თეორიის სათავეები უკავშირდება ს.ა. ანტონიანის, რ.ჯიმენეზის და ს.დე.ნეიმეტის [An-J-N], ს.ა. ანტონიანის და ს.მარდეშიჩის [An-M], ზ.ჩერინის [$\check{C}_3$], პ.ს.გევორქიანის ([G_1]-[G_3]) და ი.მ.სმირნოვის ([Sm_1]-[Sm_3]) შრომებს. ექვივარიანტული შეიპური თეორიის პრობლემების გადაწყვეტაში მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ი.მ.სმირნოვისა და მისი მოსწავლეების შრომებში განვითარებულმა მეთოდებმა და მიღებულმა შედეგებმა.

n-შეიპური თეორია აგებულ იქნა ა. ჩიგოგიძის ([Ch_1],[Ch_2]) მიერ კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა კატეგორიისათვის. მისი შედეგები გავრცელებული იქნა ლოკალურად კომპაქტური სეპარაბელური სივრცეების და საკუთრივი ასახვების კატეგორიაზე ი.აკაიკეს ([Ak_1],[Ak_2]), ი.აკაიკესა და კ.საკაის [Ak-Sa] და კ.საკაის [Sa] მიერ. ნებისმიერი კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცეების კატეგორიისათვის n-შეიპური თეორია გამოკვლეული იქნა რ.ჯიმენეზის და ლ.რ.რუბინის [Ji-R] მიერ.

[Ca-H] A. Calder and H. M. Hasting, Realizing strong shape equivalences, J. Pure Appl. Algebra, 20(1981), 129-156.

[Ch_1] A. Chigogidze, The theory of n-shapes, Uspekhi Mat. Nauk 44:5 (1989), 117-140.

[Ch_2] A. Chigogidze, n-shapes and n-cohomotopy groups of compacta, Mat. Sb. 180 (1989), 322-335.

[Ch_3] A. Chigogidze, inverse Spectra, North-Holland Math. Library 53, Elsevier Sci. Pub!' B.Y., Amsterdam,1996.

[Cl-Mo] M. Clapp and L. Montejano, Parametrized shape theory, Glasnik Mat.,40(1985), 215-241.

[Co-P] J. M. Cordier and T. Porter, Shape Theory: Categorical Methods of Approximation, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2008.

[Cr-J] M.Crabb and I.James, Fibrewise Homotopy Theory, Springer, 1998.

[D] M.Dadarlat, Shape theory and asymptotic morphisms for C^*-algebras. Duke Math. J.,73(1994), 687-711.

[Do_1] D. Doičinov, On the uniform shape of metric spaces, Soviet Math. Dokl., 17 (1976), 86-89.

[Do_2] D. Doičinov, The uniform shape, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys., 25 (1977), 977-980.

[Do_3] D. Doičinov, Uniform shape and uniform tech homology and cohomology groups for metric spaces, Fund. Math., 102 (1979), 209-218.

[Dol_1] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Dol_2] A. Dold, The fixed index of fibre-preserving maps. Invent. Math., 25(1974), 281-298

[Dr] A. N. Dranishnikov, Absolute extensors in dimension n and n-sof mappings. (Russian)Uspekhi Mat. Nauk, 19(1984), 55-95.

[Dy-N_1] J. Dydak and S. Nowak, Strong shape for topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 323(1991), 765-796.

[Dy-N_2] J. Dydak and S. Nowak, Function space and shape theories, Fund. Math., 171(2002), 117-154.

[Dy-S] J. Dydak and J. Segal, Strong shape theory, Dissertations Math., PWN, Warsaw,192(1981),1–42.

[E-A] D. A. Edvards and P. T. Mc. Auley, The shape of map. Fund. Math., 56(1977),195–210.

[E-H] D. Edwards and H. Hastings, Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[En] R. Engelking, General Topology, PWN, Warszawa, 1977.

[F_1] S. Ferry, A stable converse to the Vietoris-Smale theorem with applications to shape theory, Trans. Amer. Math. Soc., 261(1980), 369-386.

[F_2] S. Ferry, Homotopy, simple homotopy and compacta, Topology, 19(1980), 101-110.

[Fo] R. H. Fox, On shape, Fund. Math., 74 (1972), 47-71.

[G_1] P. S. Gevorgyan, Free equivariant shapes. Sixteenth Summer Conference on Topology and its Applications, (2001), 18-20.

[B10] V.Baladze, Fiber shape theory, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 132(2003), 1-70.

[B11] V. Baladze, Characterization of precompact shape and homology properties of remainders.Topology Appl., 142 (2004), 73-88.

[B12] V.Baladze, On the spectral (co)homology exact sequences of maps, Georgian Math. J., 19(2012), 1-12.

[B13] V.Baladze, The (co)shape and (co) homological properties of continuous maps, Math. Vestnik, Belgrad, 66 (2014), 235-247.

[B-Tu$_1$] V.Baladze and L.Turmanidze, On uniform shape theory with precompact supports, Proc. of A. Razmadze Math. Inst., 127(2001), 63-75.

[B-Tu$_2$] V.Baladze and L.Turmanidze, Čech's type functors and completions of spaces, 165 (2014), 1-12

[Ba] B.J. Ball, Alternative approaches to proper shape theory. Academic Press, New York (1975),1-27.

[Ba-Sh] B. J. Ball and R. B. Sher, A theory of proper shape for locally compact metricspaces, Fund.Math., 8(1974), 163-192.

[Bat] M.A. Batanin, Categorical strong shape theory, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Caté- goriques, 38(1997),3–65.

[Bau] F. W. Bauer, A shape theory with singular homology, Pac. J. Math.,64(1976), 25–64.

[Bo$_1$] K. Borsuk, Theory of Retracts, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1967.

[Bo$_2$] K. Borsuk, Concerning homotopy properties of compacta, Fund. Math.62(1968), 223-254.

[Bo$_3$] K. Borsuk, Concerning the notion of the shape of compacta,in: Proc.Inter-nat. Symp. Topology and its Appl. Astronom., Beograd, (1969), 98-104.

[Bo$_4$] K. Borsuk, Theory of Shape, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975.

[Bu-Miw-Pa] D. Buhagiar, T. Miwa and B. A. Pasynkov, On metrizable type (MT-) maps and spaces. Topology, Appl.,96(1999), 31-51.

[By-Te$_1$] A.Bykov and M.Texis, Equivariant fibrant spaces, Glasnik Mat., 40(2005), 323-331.

[By-Te$_2$] A. Bykov and M. Texis, Equivariant strong shape, Topology Appl., 154(2007), 2026-2039.

[C$_1$] F.W. Cathey, Strong shape theory, Ph.D. Thesis, University of Washington, 1979.

[C$_2$] F.W. Cathey, Strong shape theory, Lecture Notes in Math., Springer, 870(1981), 215-238.

[Ca-Pa] F. Cammaroto and B.A. Pasynkov, Some metrization theorems for continuous mappings. Questions, Answers Gen. Topology, 20 (2002),13-32.

[Š] A. Šostak, Shape equivalence in compact classes, Dokl.Akad. Nauk SSSR, 214 (1974),67-70.

[Č$_1$] Z. Čerin, Proper shape theory, Acta Sci. Math., 59 (1994), 679-711.

[Č$_2$] Z.Čerin, Fiberwise shape theory, Collect. Math., 45(1994), 101–119.

[Č$_3$] Z. Čerin, Equivariant shape theory. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 117 (1995), 303-320.

გარდა ამისა, არსებობს ფიქსირებული B_0 სივრცის მიმართ განხილული სივრცეების და უწყვეტი ასახვების ფიბრული შეიპური თეორიის სხვადასხვა ნაირსახეობა. ფიბრული შეიპური თეორია წარმოადგენს ANR_{B_0}-სივრცეების ($[Dol_2]$, $[Y_2]$) და ANR-ასახვების ([U], [N-S]) ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიის გაგრძელებას.

ფიბრული შეიპური თეორია B_0-ზე განხილული კომპაქტური მეტრიკული სივრცეების და ფენების შემნახველი ასახვების კატეგორიისათვის განხილული იქნა ჰ.კატოს ($[K_1]$-$[K_4]$) და მ.კლაპისა და ლ.მონტეჯანოს [Cl-Mo] მიერ. ტ. იაგასაკის შრომებში ($[Y_1]$-$[Y_4]$) გამოკვლეული იქნა ფიბრული შეიპური თეორია B_0 მეტრიკული სივრცის მიმართ განხილული მეტრიკული სივრცეების და ფენების შემნახველი ასახვების კატეგორიისათვის. B_0 მეტრიკული სივრცის მიმართ განხილული ნებისმიერი სივრცეებისთვის, მეტრიკული სივრცეების ასახვებისთვის და ტოპოლოგიური სივრცეების ასახვებისთვის ფიბრული შეიპური თეორიები განვითარებული იქნა ვ.ბალაძის ($[B_2]$-$[B_6]$, $[B_{10}]$), ზ.ჩერინის $[Č_2]$ და დ.ა.ედვარდსისა და პ.ტ.მაკაულეის [E-A] შრომებში.

კლასიკურ შეიპურ თეორიასა და მის ნაირსახეობებთან ერთად არსებობს თანამედროვე გეომეტრიული ტოპოლოგიის მნიშვნელოვანი დარგი, ე.წ. ძლიერი შეიპური თეორია, რომელსაც ტოპოლოგიაში (ზოგადი ტოპოლოგია, ალგებრული ტოპოლოგია, გეომეტრიული ტოპოლოგია) გამოყენებების გარდა ($[M_3]$, [Md]) აქვს აგრეთვე საინტერესო გამოყენებანი მათემატიკის სხვა დარგებშიც (დინამიკური სისტემები, C^*-ალგებრები) ([H],[D]).

ძლიერი შეიპური თეორია სივრცეთა სხვადასხვა კატეგორიისათვის გამოკვლეული იქნა მრავალი ავტორის მიერ. კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა კატეგორიისათვის ექვივალენტური ძლიერი შეიპური თეორიები განვითარებული იქნა ფ.ვ.ბაუერის [Bau], ა.კალდერისა და ჰ.მ.ჰასტინგსის [Ca-H], ფ.ვ.კატეის $[C_1]$, ჯ.დიდაკის და ჯ.სეგალის [Dy-S], დ.ა.ედვარდსის და ჰ.მ.ჰასტინგსის [E-H], ი.კოდამასა და ჯ.ონოს [Ko-O], ი.ლისიცას $[L_4]$ და ჯ.ბ.ქვიგლის [Q] მიერ.

ზოგადი ტოპოლოგიური სივრცეების კატეგორიისათვის და

ნებისმიერი კატეგორიისათვის ძლიერი შეიპური თეორია აგებული იქნა მ.ბატანინის [Bat], ფ.ვ.ბაუერის [Bau], ჯ.დიდაკის და ს.ნოვაკის ([Dy-N$_1$], [Dy-N$_2$]), ი.ტ.ლისიცას [L$_3$], ი.ტ.ლისიცასა და ს.მარდეშიჩის [L-M], ზ.მიმინოშვილის [Mim] და ლ.სტრამასსიას [St] მიერ. ძლიერი შეიპური თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოხსნილ იქნა ტოპოლოგიის მრავალი სერიოზული პრობლემა [M$_3$].

შეიპური თეორიის განვითარების თანამედროვე პერიოდისთვის დამახასიათებელია ძლიერი შეიპური თეორიის სხვადსხვა ვერსიის აგება და განვითარება.

ექვივარიანტული ჰომოტოპიის ცნებაზე დაფუძნებული ძლიერი შეიპური თეორია აგებული იქნა ვ.ბალაძის [B$_1$] მიერ მეტრიკული G-სივრცეებისათვის და ა.ბიკოვსისა და მ.ტექსისის [By-Te$_2$] მიერ კომპატური მეტრიკული G-სივრცეებისათვის.

ძლიერი შეიპური თეორია, დაფუძნებული n-ჰომოტოპიის ცნებაზე, განვითარებული იქნა ი.ივამოტოსა და კ.საკაის [I-Sa] მიერ.

ფიბრული ტოპოლოგია არის ჰომოტოპიური ტოპოლოგიის ახალი მიმართულება და დღეს უჭირავს ერთერთი ცენტრალური ადგილი თანამედროვე ტოპოლოგიაში ([Cr-J], [J$_1$], [J$_2$], [Po]). ის აღმოცენდა ზოგადი ტოპოლოგიის, ალგებრული ტოპოლოგიის და გეომეტრიული ტოპოლოგიის მიჯნაზე. მისი მეთოდები წარმატებით გამოიყენება როგორც ტოპოლოგიის, ისე დიფერენციალური გეომეტრიის, ლის ჯგუფების და დინამიკური სისტემების ამოცანების კვლევისას.

ფიბრაციული ტოპოლოგიის ალგებრული და ჰომოტოპიური ასპექტები შესწავლილ იქნა ი.მ.ჯეიმსის [J2] და ი.მ.ჯეიმსის და მ.კრაბის [Cr-J]. ზოგადი ტოპოლოგიის თვალსაზრისით კი ფიბრაციული ტოპოლოგია შესწავლილ იქნა ფ.კამაროტოს, ბ.პასინკოვის, დ.ბუჰაგიარის და ტ.მივას მიერ ([Bu-Miw-Pa], [Ca-Pa]).

ფიბრული სივრცეების ახალი თვისებების და მახასიათებლების დადგენას აქვს დიდი მნიშვნელობა ზოგადად მათემატიკისთვის. აქედან გამომდინარე, ფიბრული ტოპოლოგიისათვის ძლიერი შეიპური თეორიის აგება არის საინტერესო და აქტუალური ამოცანა.

ისევე როგორც, ძლიერი შეიპური თეორია აღმოცენდა ჰომოტოპიის თეორიიდან, ასევე ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია წარმოიქმნება ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიიდან.

გამოყენებული ლიტერატურა

სადისერტაციო ნაშრომში გამოყენებულია შემდეგი შრომები და მონოგრაფიები:

[A] V.V. Agaronian, Shape classication of uniform spaces. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 228 (1976), 848-851.

[A-S] V.V. Agaronian and Yu. M. Smirnov, The shape theory for uniform spaces and the shape uniform invariants.Commentationes Math. Univ. Corolinae, 19 (1978), 351-357.

[Ak$_1$] Y. Akaike, Proper n-shape and property SUV", Bull. Polish Acad. Sci., Math., 45 (1997), 251-261.

[Ak$_2$] Y. Akaike, Proper n-shape and the Freudellthal compactifiratioll, Tsukuba J. Math., 22 (1998), 393-406.

[Ak-Sa] Y.Akaike and K.Sakai, Describing the proper n-shape category by using non-continuous functions, Glasnik. Math., (53) (1998), 299-321.

[An$_1$] S.A.Antonyan, Equivariant generalization of Dugundji's theorem,Mat. Zametki 38 (1985) 608-616; English transl. in: Math. Notes 38 (1985),844-848.

[An$_2$] S.A. Antonian, An equivariant theory of retracts, in: Aspects of Topology (In memory of Hugh Dowker), London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 93, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (1985),251-269.

[An$_3$] S.A. Antonian, Equivariant embeddings into G-AR's, Glas. Mat. 22 (42) (1987),503-533.

[An$_4$]S.A. Antonyan, Retraction properties of the orbit space, Mat. Sb. 137 (1988) 300-318; English transl. in: Math. USSR-Sb. 65 (1990),305-321.

[An-M] S. A. Antonian and S. Mardešic´, Equivariant shape. Fund. Math., 127 (1987), 213–224.

[An-J-N] S. A. Antonyan, R. Jimenez and S. de Neymet, Fiberwise retraction and shape properties of the orbit space, Glasnik Mat., 35(2000), 191-210.

[B$_1$] V. Baladze, On an equivariant strong theory of shapes. (Russian. English summary). Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR., 122(1986), 501-504.

[B$_2$] V.Baladze, On shape theory for fibrations, Bull. Georgian Acad. Sci., 129(1988), 269-272.

[B$_3$] V.Baladze, On shape of map, Inter. Top. Conf., Proceedings, Baku, 1989, 35-43.

[B$_4$] V.Baladze, Fiber shape theory, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste.An International Journal of Mathematics, 22(1990), 67-77.

[B$_5$] V.Baladze, Fiber shape theory and resolutions, Zb. Rad. Filoz. Fak. Nisu, Ser. Mat., 5(1991),97-107.

[B$_6$] V. Baladze, Fiber shape theory of maps and resolutions. Bull. Georgian Acad. Sci., 141(1991),489–492.

[B$_7$] V.Baladze, A proper shape theory and resolutions. Bull. Georgian Acad. Sci., 151(1995), 13-18 .

[B$_8$] V. Baladze, On Uniform shapes. Bull. Georgian Acad. Sci., 169(2002),26-29 .

[B$_9$] V. Baladze, On ARU-resolutions of uniform spaces, Georgian Math. J., 10 (2003), 201-207.

6. II International Conference of the Georgian Mathematical Union, Shota Rustaveli University, Batumi, Georgia, September 15-19, 2011.
7. First International Conference of the Georgian, Mathematical Union, Batumi, Georgia, September 12-19, 2010.

შრომები

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები გადმოცემულია შემდეგ შრომებში:

1. R. Tsinaridze, On Fiber Strong Shape Equivalences, Transactions of Batumi Regional Scientific Center of Georgian National academy of Sciences, Batumi, (2016)29-37.
2. Baladze V. and Tsinaridze R. On fiber fibrant spaces, Transactions of Batumi Regional Scientific Center of Georgian National academy of Sciences, Batumi, (2016)7-19.
3. Baladze V. and Tsinaridze R. On fiber Strong Shape Theory, Transactions of Batumi Regional Scientific Center of Georgian National academy of Sciences, Batumi, (2016) 20-28.
4. R. Tsinaridze, On fiber strong shape Equivalences, Twelfth Symposium on General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, http://www.toposym.cz/programme.php., Prague,Czech Republic,July (2016)25–29.
5. V.Baladze and R.Tsinaridze, On Fiber Strong Shape Theory, VII International Joint Conference of the Georgian Mathematical Union & The Georgian Mechanical Union, Dedicated to 125-th birthday anniversary of academician N.Muskhelishvili Batumi, July (2016) 12–16.
6. R.Tsinaridze, On Equivariant Fiber Shape Theory, V International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, September 8-12, (2014) 164-165.
7. R.Tsinaridze, On Equivariant Fiber Shape Theory, Caucasian Mathematics Conference CMC I, Tbilisi, September 5- 6, (2014)166-167.
8. Baladze V. and Tsinaridze R. On Finite-Valued Cohomology Theories, Journal of Mathematical Sciences, 193, Issue 3, (2013)369-373.
9. R.Tsinaridze, Strong Fiber Shape Theory, IV International Conference of the Georgian Mathematical Union, Tbilisi-Batumi, September (2013) 9-15, 82.
10. V.Baladze and R.Tsinaridze, On Normal Homology and Cohomology Theories, III International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, September 2- 9, (2012) 83-84.
11. V.Baladze and R.Tsinaridze, On the Cohomology theory of Alexander-Spanier, II International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, September 15- 19, (2011) 77-78.

ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის განვითარება არის ფიბრული ტოპოლოგიის განვითარების ბუნებრივი პროცესი, რაც იძლევა შეიპების თეორიის მეთოდებით ფიბრული ტოპოლოგიის, კერძოდ, ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიის შემდგომი კვლევის პერსპექტივას.

შრომის მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია ფიბრული ტოპოლოგიის ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის განვითარება, კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა და, ზოგადად, ტოპოლოგიურ სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კლასიფიკაციის აგების ამოცანის გამოკვლევა, იმ აუცილებელი და საკმარისი პირობების დადგენა, რომელთა შესრულების შემთხვევაში შეიპური მორფიზმები არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები. შრომა მიზნად აგრეთვე ისახავს მთავარი ფოკუსი გადატანილ იქნეს ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე.

შრომის მეცნიერული სიახლე

სადისერტაციო ნაშრომის კვლევების ძირითადი მიღწევებია:

1.ბორსუკის ფიბრული წყვილების შესწავლა და მათი თვისებების დადგენა.

2.ფიბრული ძლიერი შეიპური დეფორმაციული რეტრაქტების, ე.წ. $SSDR_{\mathbf{B_0}}$ -ასახვების, განმარტება და მათი თვისებების დადგენა.

3. B_0 -ზე ფიბრანტული სივრცეების განმარტება და მათი თვისებების დადგენა.

4. B_0 -ზე სივრცეთა შებრუნებული მიმდევრობის ფიბრული კოტელესკოპის აგება და მისი თვისებების შესწავლა.

5.ფიბრული კოტელესკოპის, B_0 -ზე ფიბრანტული სივრცეების და ფიბრული რეზოლვენტების გამოყენებით კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კლასიფიკაციის აგება.

6. ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის მეშვეობით ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობების დახასიათება.

7. ფიბრული ძლიერი ANR_{B_0}-გაფართოების ცნების შემოტანა და მისი არსებობის თეორემის დამტკიცება.

8.ზოგად ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\mathbf{SSH_{B_0}}$ ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორიის, $SS_{B_0}:\mathbf{HTop_{B_0}}\to\mathbf{SSH_{B_0}}$ ძლიერი შეიპური ფუნქტორის, ვ.ბალაძის $\mathbf{SH_{B_0}}$ ფიბრულ შეიპურ კატეგორიაში $S:\mathbf{SSH_{B_0}}\to\mathbf{SH_{B_0}}$ ფუნქტორის აგებანი და $S\cdot SS_{B_0}=S_{B_0}$ ტოლობის დამტკიცება, სადაც $S_{B_0}:\mathbf{HTop_{B_0}}\to\mathbf{SH_{B_0}}$ არის ვ.ბალაძის ფიბრული შეიპური ფუნქტორი.

გამოკვლევის ძირითადი მეთოდები

სადისერტაციო ნაშრომში გამოიყენება ჰომოტოპიური ტოპოლოგიის, შეიპების თეორიის, რეტრაქტების თეორიის და კატეგორიათა თეორიის მეთოდები.

ნაშრომის პრაქტიკული და თეორიული ღირებულება

სადისერტაციო ნაშრომს აქვს თეორიული ხასიათი. დისერტაციის შედეგები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ფიბრულ ტოპოლოგიაში, შეიპების თეორიაში და რეტრაქტების თეორიაში სპეციალური კურსების კითხვისას.

ნაშრომის საერთო დახასიათება

თავდაპირველად მოვიყვანოთ ნაშრომის შედეგების მოკლე აღწერა თავების მიხედვით.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავისა და გამოყენებული ლიტერატურის მომცველი ბიბლიოგრაფიული ნუსხისგან.

შესავალში მოკლედ აღწერილია შეიპური და ძლიერი შეიპური თეორიების განვითარების ისტორია და სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები.

პირველი თავი ეძღვნება ფიბრული ტოპოლოგიის მიმოხილვას, დაწყებულს საბაზისო თეორიით და გაგრძელებულს ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიის და ფიბრული რეტრაქტების თეორიის რჩეული და სპეციალური საკითხებით. პირველი თავი აგრეთვე ეხება ბორსუკის ფიბრულ წყვილებს, ძლიერ შეიპურ

$\mathrm{ssh}_{B_0}((X,\pi_X))$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ (X,π_X) ტოპოლოგიური სივრცის ექვივალენტობის კლასი $\mathbf{SSH_{B_0}}$ კატეგორიაში და ვუწოდოთ (X,π_X) სივრცის ფიბრული ძლიერი შეიპი.

პარაგრაფ 3.2-ში აგებულია $SS_{B_0}:\mathbf{HTop_{B_0}}\to\mathbf{SSH_{B_0}}$ ფიბრული ძლიერი შეიპური ფუნქტორი და $S:\mathbf{SSH_{B_0}}\to\mathbf{SH_{B_0}}$ ფუნქტორი ვ.ბალაძის ფიბრულ შეიპურ კატეგორიაში. დამტკიცებულია ერთერთი მთავარი შედეგი.

თეორემა 3.2.5. *კომუტაციურია შემდეგი დიაგრამა*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{SH_{B_0}} \\ \mathbf{HTop_{B_0}} \arrow[ur, "S_{B_0}"] \arrow[dr, "SS_{B_0}"'] & \\ & \mathbf{SSH_{B_0}}, \arrow[uu, "S"'] \end{tikzcd}$$

სადაც S_{B_0} *არის ვ.ბალაძის ფიბრული შეიპური ფუნქტორი* $[B_4]$.

შედეგი 3.2.6. *ვთქვათ* (X,π_X) *და* (Y,π_Y) *არის* B_0*-ზე ტოპოლოგიური სივრცეები. თუ* $\mathrm{ssh}_{B_0}((X,\pi_X))=\mathrm{ssh}_{B_0}((Y,\pi_Y))$, *მაშინ* $\mathrm{sh}_{B_0}((X,\pi_X))=\mathrm{sh}_{B_0}((Y,\pi_Y))$.

ნაშრომის შედეგების აპრობაცია

სადისერტაციო ნაშრომის შედეგები მოხსენებულ იქნა შემდეგ მათემატიკურ ფორუმებზე:

1. Twelfth Symposium on General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, July 25-29, Prague, Czech, 2016.
2. VI Annual Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, Georgia, July 12-16, 2015.
3. V Annual Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, Georgia, September 8-12, 2014.
4. IV International Conference of the Georgian Mathematical Union, Dedicated to academician Victor Kupradze on his 110-th birthday anniversary, Tbilisi - Batumi, Georgia, September 9-15, 2013.
5. III International Conference of the Georgian Mathematical Union, Shota Rustaveli University, Batumi, Georgia, September 2-9, 2012.

$$H(y,1) = f_1 p_{\alpha\alpha'}(y), \qquad y \in X_{\alpha'},$$
$$(S, H(1\times p_{\alpha'})) \le \mathcal{U}.$$

თავი 3-ის პარაგრაფ 3.2-ში აგებულია $\mathbf{CPHTop_{B_0}}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული პროჰომოტოპიის კატეგორია. ამ კატეგორიის ობიექტებია მიმართულ კოსასრულ სიმრავლეზე მოცემული B_0-ზე ტოპოლოგიური სივრცეებისა და ფენების შემნახველი ასახვებისაგან შემდგარი შებრუნებული სისტემები, ხოლო მორფიზმები $f: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ფენების შემნახველი კოჰერენტული ასახვის ფენების შემნახველი კოჰერენტული ჰომოტოპიის $[f]: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ კლასები.

არსებობს $C: \mathbf{pro-Top_{B_0}} \to \mathbf{CPHTop_{B_0}}$ და $E: \mathbf{CPHTop_{B_0}} \to \mathbf{pro-HTop_{B_0}}$ ფუნქტორები.

$$E\circ C : \mathbf{pro-Top_{B_0}} \to \mathbf{pro-HTop_{B_0}}$$

კომპოზიცია არის ფენების შემნახველი $H: \mathbf{Top_{B_0}} \to \mathbf{HTop_{B_0}}$ ფიბრული ჰომოტოპიური ფუნქტორით ინდუცირებული ფუნქტორი.

$\mathbf{SSH_{B_0}}$ კატეგორიის ობიექტებია B_0-ზე ყველა შესაძლო ტოპოლოგიური სივრცეები,ხოლო $\mathbf{SSH_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმები განიმარტება შემდეგნაირად.

ვთქვათ, $\mathbf{p}: (X,\pi_X) \to \mathbf{X}$ და $\mathbf{q}: (Y,\pi_Y)\to \mathbf{Y}$ შესაბამისად არის (X,π_X) და (Y,π_Y) სივრცეების ANR_{B_0} –რეზოლვენტები, ხოლო $[f]:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ არის $\mathbf{CPHTop_{B_0}}$ კატეგორიის რაიმე მორფიზმი. ვთქვათ $\mathbf{p}': (X,\pi_X)\to \mathbf{X}'$, $\mathbf{q}': (Y,\pi_Y)\to\mathbf{Y}'$, $[f']:\mathbf{X}'\to\mathbf{Y}'$ არის B_0-ზე (X,π_X) და (Y,π_Y) სივრცეთა სხვა ANR_{B_0} –რეზოლვენტები და $\mathbf{CPHTop_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმი.

$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, [f])$ და $(\mathbf{p}', \mathbf{q}', [f'])$ სამეულებს ეწოდება ექვივალენტური, თუ $[f'][i] = [j][f]$, სადაც $[i]: \mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ და $[j]:\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}'$ არის $\mathbf{CPHTop_{B_0}}$ კატეგორიის იზომორფიზმები.

ფიბრული ძლიერი შეიპური მორფიზმი $F: (X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ არის $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, [f])$ სამეულის ექვივალენტობის კლასი განმარტებული ექვივალენტური მიმართების მიმართ.

დეფორმაციულ ასახვებს და B_0-ზე ფიბრანტულ სივრცეებს. მეორე თავში განმარტებულია და შესწავლილია ფიბრული კოტელესკოპები, აგებულია B_0-ზე კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეთა ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია და მოცემულია ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობების დახასიათებები. მესამე თავში შესწავლილია ფიბრული ANR_{B_0}-რეზოლვენტები და განვითარებულია ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცეებისთვის.

ახლა მოვიყვანოთ დისერტაციაში მიღებული შედეგების დაწვრილებითი მიმოხილვა.

თავი 1-ის პარაგრაფ 1.1-ში მიღებულია B_0-ზე სივრცეების ბორსუკის წყვილების დახასიათებებთან დაკავშირებული ზოგიერთი შედეგი.

ბორსუკის ფიბრული წყვილების თვისებები აღწერილია შემდეგ წინადადებებში.

თეორემა 1.1.1. *B_0-ზე ასახვა $i:(A,\pi_A)\to(X,\pi_X)$ არის კოფიბრაცია B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B_0-ზე $j:(\mathrm{Cyl}(i),\pi_{\mathrm{Cyl}(i)})\to(X\times I,\pi_{X\times I})$ ასახვა არის რეტრაქტირებადი.*

შედეგი 1.1.2. *B_0-ზე X სივრცის და მისი ჩაკეტილი A ქვესივრცის (X,A) წყვილი არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(X\times\{0\})\cup(A\times I)\subset X\times I$ არის $X\times I$-ის რეტრაქტი B_0-ზე.*

შედეგი 1.1.3. *ყოველი (X,A) ჩაკეტილი ბორსუკის წყვილისათვის B_0-ზე და ყოველი B_0-ზე Y სივრცისთვის $(X\times Y, A\times Y)$ არის ბორსუკის ჩაკეტილი წყვილი B_0-ზე.*

შედეგი 1.1.4. *თუ (X,A) არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე და A არის X ლოკალურად კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ ყოველი B_0-ზე Y სივრცისთვის $i^*: Y^X\to Y^A$ ასახვა არის B_0-ზე კოფიბრაცია.*

თეორემა 1.1.5. *B_0-ზე (X,π_X) სივრცის და მისი ჩაკეტილი $(A,\pi_{X|A})$ ქვესივრცის (X,A) წყვილი არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $\psi: X\to I$ ასახვა და A-ს*

მიმართ $G:(X\times I,\pi_{X\times I})\to(X,\pi_X)$ ფიბრული ჰომოტოპია, რომ $A=\psi^{-1}(0)$, $G(x,0)=x$ და $\psi(x)<t$ მნიშვნელობისთვის $G(x,t)\in A$.

თეორემა 1.1.6. *ვთქვათ (X,A) არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე. მაშინ*

$$(X\times I,(X\times\{0\})\cup(A\times I)\cup X\times\{1\})$$

არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე.

თეორემა 1.1.7. *ვთქვათ (X,A) არის ბორსუკის წყვილი B_0-ზე. მაშინ B_0-ზე რეტრაქცია $r:(X,\pi_X)\to(A,\pi_{X|A})$ არის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქცია B_0-ზე.*

თეორემა 1.1.8. *B_0-ზე სივრცეების ჩაკეტილი (X,A) წყვილი არის ბორსუკის წყვილი* B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\tilde{A}=(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ *არის $(X\times I,\pi_{X\times I})$-ის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი B_0-ზე.*

შედეგი 1.1.9. *ვთქვათ (X,A) არის ბორსუკის ჩაკეტილი წყვილი B_0-ზე. მაშინ (A,π_A)* ქვესივრცე არის *(X,π_X)-ის ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი B_0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $i:(A,\pi_A)\to(X,\pi_X)$ ჩადგმა არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა.*

თავი 1-ის პარაგრაფ 1.2-ში მოცემულია შეიპური ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქციის ასახვასთან (SSDR-ასახვასთან) და ფიბრანტულ სივრცეებთან ასოცირებული განმარტებები და ცნებები და დადგენილია მათი თვისებები.

თავი 1-ში განხილული ყველა სივრცე არის მეტრიზებადი. აქ საბაზისო განმარტებაა შემდეგი

განსაზღვრება 1.2.1. *ვთქვათ, $(X,\pi_X)\in ob(\mathbf{M}_{\mathbf{B}_0})$ და A არის X სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. B_0-ზე $(A,\pi_{X|A})$ ქვესივრცეს ეწოდება (X,π_X) სივრცის შეიპური ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქტი B_0-ზე, თუ არსებობს $\alpha:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)\in AR_{B_0}$ ჩადგმა B_0-ზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:*

(Y,π_Y)-ში $\alpha(X)$ და $\alpha(A)$ ანასახების ნებისმიერი U და V მიდამოებისთვის არსებობს B_0-ზე ისეთი ჰომოტოპია $H:(X\times I,\pi_{X\times I})\to(U,\pi_{Y|U})\,\mathrm{rel}A$, რომ ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის $H(x,0)=\alpha(x)$ და $H(x,1)\in V$.

თეორემა 3.1.6. *ვთქვათ, (X,π_X) არის ტოპოლოგიური სივრცე B_0-ზე. მაშინ ყოველი B_0-ზე რეზოლვენტა $\mathbf{p}:(X,\pi_X)\to\mathbf{X}$ ინდუცირებს B_0-ზე ძლიერ ANR_{B_0}-გაფართოებას.*

შედეგი 3.1.7. *ყოველი ANR_{B_0}-რეზოლვენტა B_0-ზე ინდუცირებს ANR_{B_0}-გაფართოებას B_0-ზე.*

შედეგი 3.1.8. *ყოველი (X,π_X) B_0-ზე სივრცისთვის არსებობს კოსასრული ძლიერი ANR_{B_0}-გაფართოება B_0-ზე.*

თეორემა 3.1.6-ის დამტკიცება მიმდინარეობს შემდეგი ლემების გამოყენებით.

ლემა 3.1.9. *ვთქვათ, (X,π_X) არის ტოპოლოგიური სივრცე მეტრიზებად B_0-სივრცეზე, $(P,\pi_P),(P',\pi_{P'})$ ANR_{B_0}-სივრცეები,* $f:(X,\pi_X)\to(P',\pi_{P'})$, $h_0,h_1:(P',\pi_{P'})\to(P,\pi_P)$ ფენების შენახველი ასახვები, ხოლო $S:(X\times I,\pi_{X\times I})\to(P,\pi_P)$ ისეთი ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$S(x,0)=h_0f(x),\quad x\in X,$$
$$S(x,1)=h_1f(x),\quad x\in X.$$

მაშინ არსებობს ისეთი $(P'',\pi_{P''})$ ANR_{B_0}-სივრცე, $f':(X,\pi_X)\to(P'',\pi_{P''})$, $h:(P'',\pi_{P''})\to(P',\pi_{P'})$ ფენების შემნახველი ასახვები და $K:(P''\times I,\pi_{P''\times I})\to(P,\pi_P)$ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$h\,f'=f,$$
$$K(z,0)=h_0h(z),\quad z\in P'',$$
$$K(z,1)=h_1\,h(z),\quad z\in P'',$$
$$K(f'\times 1_I)=S.$$

ლემა 3.1.10. *ვთქვათ, $\mathbf{p}:(X,\pi_X)\to\mathbf{X}$ არის რეზოლვენტა B_0-ზე, ხოლო $\alpha,(P,\pi_P),f_0,f_1$ და S შესაბამისად არის ისეთი ინდექსი, B_0-ზე სივრცე და ფენების შემნახველი ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებს $SE_{B_0}2)$ პირობის მოთხოვნებს. მაშინ (P,π_P) სივრცის ყოველი $\mathcal{U}$ ღია დაფარვისთვის არსებობს ისეთი $\alpha'\geq\alpha$ ინდექსი და ისეთი ფენების შემნახველი $H:(X_{\alpha'}\times I,\pi_{X_{\alpha'}\times I})\to(P,\pi_P)$ ჰომოტოპია, რომ*

$$H(y,0)=f_0\,p_{\alpha\alpha'}(y),\qquad y\in X_{\alpha'},$$

სივრცის ფიბრული გაფართოება, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$E_{B_0}1)$. *ყოველი* (P,π_P) ANR_{B_0} *-სივრცისთვის და* $f:(X,\pi_X)\to(P,\pi_P)$ *ფენების შემნახველი ასახვისთვის არსებობს ისეთი* $\alpha\in\mathscr{A}$ *ინდექსი და ისეთი* $h:(X_\alpha,\pi_{X_\alpha})\to(P,\pi_P)$ *ფენების შემნახველი ასახვა, რომ* $h\,p_\alpha \underset{B_0}{\simeq} f$.

$E_{B_0}2)$. *თუ* $f,f':(X_\alpha,\pi_{X_\alpha})\to(P,\pi_P)$ *არის ფენების შემნახველი ასახვები,* $(P,\pi_P)\in\mathrm{ANR}_{B_0}$ *და* $f\,p_\alpha \underset{B_0}{\simeq} f'\,p_\alpha$, *მაშინ არსებობს ისეთი* $\alpha'\ge\alpha$ *ინდექსი, რომ* $f\,p_{\alpha\alpha'} \underset{B_0}{\simeq} f'\,p_{\alpha\alpha'}$.

განსაზღვრება 3.1.5. $\mathbf{p}:(X,\pi_X)\to((X_\alpha,\pi_{X_\alpha}),p_{\alpha\alpha'},\mathscr{A})$ მორფიზმს ეწოდება B_0-ზე ძლიერი გაფართოება, თუ ის აკმაყოფილებს $E_{B_0}1)$ პირობას და შემდეგ პირობას:

$SE_{B_0}2)$. ვთქვათ, (P,π_P) არის ANR_{B_0}–სივრცე, $f_0,f_1:(X_\alpha,\pi_{X_\alpha})\to(P,\pi_P)$, $\alpha\in\mathscr{A}$ ფენების შემნახველი ასახვები, ხოლო $F:(X\times I,\pi_{X\times I})\to(P,\pi_P)$ ისეთი ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$S(x,0)=f_0p_\alpha(x),\quad x\in X,$$

და

$$S(x,1)=f_1p_\alpha(x),\quad x\in X.$$

მაშინ არსებობს ისეთი $\alpha'\ge\alpha$ ინდექსი და $H:(X_{\alpha'}\times I,\pi_{X_{\alpha'}\times I})\to(P,\pi_P)$ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომ

$$H(x,0)=f_0p_{\alpha\alpha'}(z),\quad z\in X_{\alpha'},$$
$$H(x,1)=f_1p_{\alpha\alpha'}(z),\quad z\in X_{\alpha'},$$
$$H(p_{\alpha'}\times 1_I)\underset{B_0}{\simeq} S(\mathrm{rel}(X\times\partial I)).$$

ყოველი ძლიერი გაფართოება B_0-ზე არის გაფართოება B_0-ზე.

თუ ყოველი $X_\alpha\in\mathrm{ANR}_{B_0}$, მაშინ $\mathbf{p}$ გაფართოებას B_0-ზე და ძლიერ გაფართოებას B_0-ზე ეწოდება ANR_{B_0}-გაფართოება და ძლიერი ANR_{B_0}-გაფართოება, შესაბამისად.

პარაგრაფ 3.1-ის ერთერთი მთავარი შედეგია შემდეგი

განმარტებიდან ჩანს რომ, თუ $\alpha:(X,\pi_X)\to(M,\pi_M)$ ჩადგმა B_0-ზე აკმაყოფილებს 1.2.1 განმარტების პირობებს, მაშინ ეს პირობები სრულდება ყოველი $\beta:(X,\pi_X)\to(Z,\pi_Z)\in\mathrm{AR}_{B_0}$ ჩაკეტილი ჩადგმისათვის B_0-ზე.

B_0-ზე $i:(A,\pi_A)\to(X,\pi_X)$ ჩაკეტილ ჩადგმას ეწოდება SSDR_{B_0}-ასახვა, თუ i ასახვა (A,π_A)-ს ჩადგამს (X,π_X)-ში, როგორც (X,π_X)-ის შეიპურ ძლიერ დეფორმაციულ რეტრაქტს B_0-ზე.

SSDR_{B_0}-ასახვის ცნება აზოგადებს SDR_{B_0}-ასახვის ცნებას. თავი 1-ის პარაგრაფ 2.1-ის შედეგთა შორის ერთერთი მთავარია

თეორემა 1.2.2. *ვთქვათ,* $(X,\pi_X)\in M_{B_0}$ *და* A *არის* X *-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე. მაშინ ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

ა) $i:(A,\pi_{X|A})\to(X,\pi_X)$ *არის* SSDR *-ასახვა* B_0 *-ზე;*

ბ) *ყოველი* B_0 *-ზე* $f:(A,\pi_{X|A})\to(Y,\pi_Y)\in\mathrm{ANR}_{B_0}$ *ასახვისათვის არსებობს ისეთი* $\tilde f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *ასახვა* B_0 *-ზე, რომ* $\tilde f\cdot i=f$ *და ნებისმიერი ორი ასეთი* B_0 *-ზე გაფართოება არის ფიბრულად ჰომოტოპიური iA ანასახის მიმართ;*

გ) *ყოველი კომუტაციური დიაგრამისათვის*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] \arrow[dd, "i"'] & & E \arrow[dl, "\pi_E"'] \arrow[dd, "p"] \\
& B_0 & \\
X \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[rr, "F"'] \arrow[uurr, dashed, bend right, "\tilde F"] & & B \arrow[ul, "\pi_B"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $p:(E,\pi_E)\to(B,\pi_B)$ *არის ფიბრაცია* B_0 *-ზე და* (E,π_E) *და* (B,π_B) *არის* ANR_{B_0} *-სივრცეები, არსებობს ისეთი* $\tilde F:(X,\pi_X)\to(E,\pi_E)$ *ასახვა* B_0 *-ზე, რომ* $\tilde F\cdot i=f$ *და* $p\cdot\tilde F=F$.

დ) B_0 *-ზე ასახვების ყოველი კომუტაციური დიაგრამისათვის*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] \arrow[dd, "i"'] & & P^K_{B_0} \arrow[dl, "\pi_{P^K}"'] \arrow[dd, "j^*"] \\
& B_0 & \\
X \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[rr, "F"'] \arrow[uurr, dashed, bend right, "H"] & & P^L_{B_0} \arrow[ul, "\pi_{P^L}"']
\end{tikzcd}$$

სადაც $P \in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, L *არის* K *სასრული* CW*-კომპლექსის ქვეკომპლექსი, ხოლო* $j : L \to K$ *ჩადგმის ასახვა, არსებობს* B_0*-ზე ფილერი* $H : (X, \pi_X) \to (P^K, \pi_{P^K})$.

ეს შედეგი თამაშობს არსებით როლს სადისერტაციო ნაშრომის თავი 1-ში და თავი 2-ში. თავი 1-ში აგრეთვე განმარტებული და გამოკვლეულია B_0-ზე ფიბრანტული სივრცეები.

განსაზღვრება 1.2.3. B_0*-ზე* (Y, π_Y) *სივრცეს ეწოდება* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცე, თუ ყოველი* B_0*-ზე* SSDR*-ასახვისთვის* $i : (A, \pi_{X|A}) \to (X, \pi_X)$ *და ყოველი* B_0*-ზე* $f : (A, \pi_{X|A}) \to (Y, \pi_Y)$ *ასახვისათვის არსებობს ისეთი* B_0*-ზე* $F : (X, \pi_X) \to (Y, \pi_Y)$ *ასახვა, რომ* $F \cdot i = f$ *, ანუ კომუტაციურია შემდეგი დიაგრამა*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi_{X|A}"] \arrow[ddr, "f"'] & & X \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[ddl, "F"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
& Y \arrow[u, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

B_0-ზე ფიბრანტული სივრცეების კლასი არის საკმარისად ფართო. ის შეიცავს B_0-ზე აბსოლუტური მიდამოებრივი რეტრაქტების კლასს (თეორემა 1.2.4) .

გარდა ამ შედეგისა, აქ დამტკიცებულია, თუ (Y, π_Y) არის B_0-ზე ფიბრანტული სივრცე და K არის კომპაქტური მეტრიკული სივრცე, მაშინ $(Y^K_{\mathrm{B}_0}, \pi_{Y^K_{\mathrm{B}_0}})$ აგრეთვე არის B_0-ზე ფიბრანტული სივრცე (თეორემა 1.2.3).

თავი 1-ის შედეგები შეჯამებულია წინადადებებში, რომლებიც სისტემატურად გამოიყენება სადისერტაციო ნაშრომის შემდეგ ნაწილებში.

თეორემა 1.2.6. *ვთქვათ,* $\mathbf{Y} = ((Y_n, \pi_{Y_n}), p_{n,n+1}, N^+)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცეების და ფიბრაციების შებრუნებული სისტება. მაშინ* $Y = \varprojlim \mathbf{Y}$ *ფიბრული ზღვრული სივრცე არის* B_0*-ზე*

აკმაყოფილებს ვ.ბალაძის მიერ განმარტებული $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-გაფართოების ფიბრული ჰომოტოპიური პირობების ძლიერ ვერსიას.

პარაგრაფ 3.1-ში დამტკიცებულია, რომ B_0-ზე სივრცეების ფიბრული რეზოლვენტები ინდუცირებს B_0-ზე სივრცეთა ფიბრულ ძლიერ გაფართოებებს. ფიბრული ძლიერი შეიპური $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B}_0}$ კატეგორიის აგებისას არსებითად გამოიყენება ეს შედეგი.

პარაგრაფ 3.1-ში მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ შემდეგი ცნებები და შედეგები.

ვთქვათ, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{I}}$ არის B_0-ზე (Y, π_Y) სივრცის დაფარვა. ვიტყვით, რომ $f, g : (X, \pi_X) \to (Y, \pi_Y)$ ფენების შემნახველი ასახვები არის $\mathcal{U}$-მახლობელი, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_\alpha \in \mathcal{U}$ ელემენტი, რომ $f(x), g(x) \in U_\alpha$. ასევე, ვიტყვით, რომ $H : (X \times I, \pi_{X \times I}) \to (Y, \pi_Y)$ ფენების შემნახველი ჰომოტოპია, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს f და g ასახვებს, არის $\mathcal{U}$-ფიბრული ჰომოტოპია, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_\alpha \in \mathcal{U}$ ელემენტი, რომ ნებისმიერი $t \in I$ რიცხვისთვის $H(x, t) \subseteq U_\alpha$.

წინადადება 3.1.1. (შეადარე $[\mathrm{B}_5]$, წინადადება 7) *ვთქვათ,* (Y, π_Y) *არის* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ *–სივრცე. მაშინ* (Y, π_Y) *სივრცის ყოველი* $\mathcal{U}$ *ღია დაფარვისთვის არსებობს* (Y, π_Y) *სივრცის ისეთი* $\mathcal{V}$ *ღია დაფარვა, რომ როცა ორი* $f, g : (X, \pi_X) \to (Y, \pi_Y)$ *ფენების შემნახველი ასახვა ნებისმიერ* (X, π_X) *ტოპოლოგიური სივრციდან* (Y, π_Y) *ტოპოლოგიურ სივრცეში არის* $\mathcal{V}$ *–მახლობელი, მაშინ არსებობს* f *და* g *ასახვების მაკავშირებელი ფენების შემნახველი* $\mathcal{U}$ *–ჰომოტოპია* $H : (X \times I, \pi_{X \times I}) \to (Y, \pi_Y)$ *. გარდა ამისა, თუ* $A \subseteq X$ *ქვესიმრავლისათვის* $f_{|A} = g_{|A}$*, მაშინ* H *არის ფენების შემნახველი ჰომოტოპია* A *ქვესივრცის მიმართ.*

განსაზღვრება 3.1.4.(ვ.ბალაძე, იხ. $[\mathrm{B}_4]-[\mathrm{B}_6]$). *ვთქვათ,* (X, π_X) *არის* B_0*-ზე სივრცე,* $\mathbf{X} = ((X_\alpha, \pi_{X_\alpha}), p_{\alpha\alpha'}, \mathscr{A})$ $\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}$ *კატეგორიის შებრუნებული სისტემა, ხოლო* $\mathbf{p} = (p_\alpha) : (X, \pi_X) \to \mathbf{X}$ $\mathbf{pro}-\mathbf{Top}_{\mathbf{B}_0}$ *კატეგორიის მორფიზმი.* $\mathbf{p}$ *მორფიზმს ეწოდება* B_0*-ზე* (X, π_X)

კატეგორიის ფიბრული ძლიერი შეიპური იზომორფიზმები.

თეორემა 2.2.10. *ჩაკეტილი ფიბრული ჩადგმა* $i:(A,\pi_{X|A})\to(X,\pi_X)$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* i *არის* B_0*-ზე* SSDR *-ასახვა.*

თეორემა 2.2.11. *ვთქვათ* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *არის* B_0*-ზე კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეებს შორის ფენების შემნახველი ასახვა, ხოლო* $(i_X,i_Y):f\to\tilde{f}$ *არის* f *ასახვის ფიბრანტული გაფართოება* B_0*-ზე. მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\tilde{f}$ *არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა.*

შედეგი 2.2.12. B_0*-ზე კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეებს შორის ფენების შემნახველი ასახვა* f *არის 2.2.1 განმარტების თვალსაზრისით ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\mathrm{SS}_{B_0}([\mathrm{f}]_{B_o})$ *არის* $\mathbf{SSH_{B_0}}$ *კატეგორიის იზომორფიზმი.*

სადისერტაციო ნაშრომის თავი 3-ში აგებულია და განვითარებულია ფიქსირებული მეტრიზებადი B_0 სივრცის მიმართ განხილული ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცეების ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია. აქ განხილული მიდგომა წარმოადგენს მარდეშიჩ-ლისიცას მეთოდის განზოგადებას და ის მარდეშიჩის მიერ შემოტანილი რეზოლვენტის ნაცვლად იყენებს რეზოლვენტის ვ.ბალაძის ფიბრულ ვერსიას. ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორია გვაძლევს B_0-ზე სივრცეების ისეთ კლასიფიკაციას, რომელიც არის უფრო სუსტი, ვიდრე ფიბრული ჰომოტოპიური თეორიის მიერ ინდუცირებული B_0-ზე სივრცეების კლასიფიკაცია, მაგრამ არის უფრო ძლიერი, ვიდრე ჩვეულებრივი ფიბრული შეიპური თეორიის მიერ წარმოქმნილი B_0-ზე სივრცეთა კლასიფიკაცია.

ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის აგება იყენებს ფიბრული ძლიერი ANR_{B_0} -გაფართოების ცნებას. B_0-ის მიმართ განხილული სივრცეების ფიბრული ძლიერი გაფართოება არის B_0-ზე სივრცეებიდან B_0-ზე სივრცეებისაგან შემდგარ შებრუნებულ სისტემებში $\mathbf{pro-Top_{B_0}}$ კატეგორიის მორფიზმები, რომლებიც

ფიბრანტული სივრცე და $p_n:(Y,\pi_Y)\to(Y_n,\pi_{Y_n})$ *ბუნებრივი პროექციები არის* B_0*-ზე ფიბრაციები.*

თეორემა 1.2.7. *ვთქვათ,* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *არის* B_0*-ზე ასახვა. თუ* $(X,\pi_X),(Y,\pi_Y)\in \mathrm{ANR}_{B_0}$, *მაშინ* $\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)\in \mathrm{ANR}_{B_0}$.

თეორემა 1.2.8. *ვთქვათ,* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტულ სივრცეებს შორის* B_0*-ზე ასახვა. მაშინ* B_0*-ზე კოცილინდრი* $\mathrm{coCyl}_{B_0}(f)$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცე.*

თავი 2-ის პარაგრაფი 2.1 იწყება B_0-ზე $\mathbf{X}=\{X_n,\pi_{X_n},q_n^{n+1},N^+\}$ შებრუნებული მიმდევრობის ფიბრული კოტელესკოპის განმარტებით.

აქ მოცემული, მისი აგების დეტალური აღწერა საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ შემდეგი მთავარი თეორემა.

თეორემა 2.1.1. *ვთქვათ* $\mathbf{X}=\{(X_n,\pi_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *არის* B_0*-ზე ფიბრანტული სივრცეების და ასახვების შებრუნებული სისტემა. მაშინ* $\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X})$ *კოტელესკოპი არის ფიბრანტული სივრცე* B_0*-ზე. თუ* $\mathbf{X}$ *შებრუნებული სისტემის ყოველი* (X_n,π_{X_n}) *წევრი არის* ANR_{B_0}*-სივრცე,მაშინ* $\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X})$ *აგრეთვე არის ფიბრანტული სივრცე* B_0*-ზე.*

არსებობს ერთადერთი ბუნებრივი B_0-ზე ჩადგმა $i_{\mathbf{q}}:(X,\pi_X)\to(\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X}),\pi_{\mathrm{coTel}_{B_0}(\mathbf{X})})$ ისეთი, რომ ყოველი $n\geq 0$ მთელი რიცხვისთვის სრულდება ტოლობა $\tilde{q}_n\; i_{\mathbf{q}}=i_n\,q_n$.

ფიბრული ძლიერი შეიპური კლასიფიკაციის განმარტების მიზნით სადისერტაციო ნაშრომში შემოთავაზებულია ფიბრული რეზოლვენტის ცნება, რომელიც წარმოადგენს ვ.ბალაძის მიერ $[B_4]$-ში მოცემული ფიბრული რეზოლვენტის განმარტების კერძო შემთხვევას.

განსაზღვრება 2.1.2. $\mathbf{X}=\{(X_n,\pi_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *შებრუნებულ სისტემას ეწოდება* B_0*-ზე* (X,π_X) *სივრცის* B_0*-ზე რეზოლვენტა, თუ*

ა) $(X,\pi_X)=\varprojlim\mathbf{X}$;

ბ) $\mathbf{q}=\{q_n:(X,\pi_X)\to(X_n,\pi_{X_n})\}_{n\in N^+}$ ოჯახი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: ყოველი $n\in N^+$ მთელი რიცხვისთვის და (X,π_X) სივრცეში $q_n(X)$ ანასახის ყოველი U ღია მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $m\ge n$ მთელი რიცხვი, რომ $q_n^m(X_m)\subseteq U$.

თუ ყოველი $(X_n,\pi_{X_n})\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$, მაშინ $\mathbf{q}$ ერთობლიობას ეწოდება $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტა B_0-ზე.

თავი 2-ში მიღებულ შედეგთა შორის ერთერთი მნიშვნელოვანია ფიბრული რეზოლვენტის არსებობის თეორემა.

თეორემა 2.1.3. B_0-ზე ყოველი კომპაქტური მეტრიზებადი (X,π_X) სივრცისთვის არსებობს B_0-ზე $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-რეზოლვენტა $\mathbf{q}:(X,\pi_X)\to\mathbf{X}$.

ამ შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ კომპაქტური მეტრიკული (X,π_X) სივრცის ყოველ ფიბრულ რეზოლვენტას შეესაბამება (X,π_X)-ის ფიბრული ფიბრანტული გაფართოება, წოდებული ამ ფიბრული რეზოლვენტის ფიბრულ კოტელესკოპად. შემდეგი შედეგი თამაშობს არსებით როლს სადისერტაციო ნაშრომის შემდეგ ნაწილში ჩატარებულ კონსტრუქციებში.

თეორემა 2.1.4. *ვთქვათ,* (X,π_X) *არის კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცე* B_0*-ზე. თუ* $\mathbf{q}:(X,\pi_X)\to\mathbf{X}=\{(X_n,\pi_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$ *არის* (X,π_X)*-ის რეზოლვენტა* B_0*-ზე, მაშინ არსებობს უსასრულო ძლიერი დეფორმაციული რეტრაქცია*
$$D:\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})\times[0,\infty)\to\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$$
$\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$*-დან* $\mathbf{i_q}(X)$*-ზე. კერძოდ,* $\mathbf{i_q}:(X,\pi_X)\to\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$ *ასახვა არის* SSDR*-ასახვა* B_0*-ზე.*

თეორემა 2.1.1-ის, თეორემა 2.1.3-ისა და თეორემა 2.1.4-ის ეფექტს ნათლად გამოხატავს შემდეგი შედეგი. ვთქვათ, $\tilde X=\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})$.

თეორემა 2.1.5. *ყოველი* B_0*-ზე* (X,π_X) *კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცისთვის არსებობს* B_0*-ზე ფიბრანტული გაფართოება* $i_X:(X,\pi_X)\to(\tilde X,\pi_{\tilde X})$*. კერძოდ, თუ* $\mathbf{q}:(X,\pi_X)\to\mathbf{X}=\{(X_n,\pi_{X_n}),q_n^{n+1},N^+\}$

7). ყოველი B_0*-ზე ასახვა გაგრძელებადია* $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *სივრცემდე და ყოველი* B_0*-ზე ასახვა*
$$H:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(P,\pi_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$$
გაგრძელებადია $(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,\pi_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I})$ *სივრცემდე.*

თეორემა 2.2.3-დან მიიღება შემდეგი წინადადებები.

შედეგი 2.2.4. *ვთქვათ,* (X,π_X) *არის* B_0*-ზე სივრცე და* $A\subset X$. $i:(A,\pi_{X|A})\to(X,\pi_X)$ *ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* i *და*
$$j:(X\times\{0\}\cup A\times I\cup X\times\{1\},\pi_{X\times\{0\}\cup A\times I\cup X\times\{1\}})\to(X\times I,\pi_{X\times I})$$
ფიბრული ჩადგმები არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები.

შედეგი 2.2.5. *ვთქვათ,* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *არის ფიბრული ჰომოტოპიური ექვივალენტობა, მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

შედეგი 2.2.6. *თუ* $g:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *არის ფიბრულად ჰომოტოპიური* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობის, მაშინ* g *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

შედეგი 2.2.7. *ვთქვათ,* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *და* $g:(Y,\pi_Y)\to(Z,\pi_Z)$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები. მაშინ* $g\,f:(X,\pi_X)\to(Z,\pi_Z)$ *კომპოზიცია არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

თეორემა 2.2.8. *ვთქვათ,* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *და* $g:(Y,\pi_Y)\to(Z,\pi_Z)$ *არის* B_0*-ზე ისეთი ასახვები, რომ* $g\,f$ *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა. თუ* f *და* g *ასახვებს შორის ერთერთი არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა, მაშინ ორივე* f *და* g *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები.*

შედეგი 2.2.9. *ვთქვათ,* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა. თუ* (X,π_X) *სივრცეს აქვს* $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-სივრცის ფიბრული ჰომოტოპიური ტიპი, მაშინ* f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.*

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის მეშვეობით შესაძლებელია აღიწეროს $\mathbf{SSH_{B_0}}$

პარაგრაფ 2.2-ში მოძებნილია ის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომელთა შესრულების შემთხვევაში B_0-ზე ასახვები არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობები. ფიბრული ასახვების სივრცეთა თვისებების მეშვეობით დამტკიცებულია ერთერთი მთავარი

თეორემა 2.2.3. *ვთქვათ* $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ *არის* B_0*-ზე ასახვა. ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

1). f *არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა*;

2). B_0*-ზე მოცემული* (Z,π_Z) *სივრცის* B_0*-ზე* (X,π_X) *ჩაკეტილი ქვესივრცისთვის, ყოველი* $g:(Z,\pi_Z)\to(P,\pi_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ B_0*-ზე ასახვა გაგრძელებადია* $(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *სივრცემდე და ყოველი* B_0*-ზე ასახვა*

$$H:(Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(P,\pi_P)\in \mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$$

გაგრძელებადია $((Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I,\pi_{(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I})$ *სივრცემდე;*

3). თუ (X,π_X) არის (Z,π_Z)-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,\pi_Z)\to(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

და

$$j:(Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{Z\times I\cup \mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to((Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I,\pi_{(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f))\times I})$$

ფიბრული ჩადგმები არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები;

4). თუ (X,π_X) არის (Z,π_Z)-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,\pi_Z)\to(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა;

5). თუ (X,π_X) არის (Z,π_Z)-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ

$$i:(Z,\pi_Z)\to(Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{Z\cup \mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$$

ფიბრული ჩადგმა არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა;

6).ფიბრული ჩადგმები $k:(X,\pi_X)\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})$ *და* $l:(\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f),\pi_{\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(f)})\to(\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I,\pi_{\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(f)\times I})$ *არის ფიბრული შეიპური ექვივალენტობები;*

არის $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$*-რეზოლვენტა* B_0*-ზე, მაშინ*

$$\mathbf{i_q}:(X,\pi_X)\to(\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X}),\pi_{\mathrm{coTel}_{\mathrm{B}_0}(\mathbf{X})})$$

ჩადგმა არის ფიბრანტული გაფართოება B_0*-ზე.*

დისერტაციაში მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიით ინდუცირებული სივრცეთა კლასიფიკაცია არის უფრო უხეში, ვიდრე ფიბრული ჰომოტოპიის თეორიის მიერ ინდუცირებული სივრცეთა კლასიფიკაცია, მაგრამ არის უფრო სუსტი, ვიდრე ფიბრული შეიპური თეორიით ინდუცირებული სივრცეთა კლასიფიკაცია.

თავი 2-ის მთავარი მიზანია ფიქსირებული B_0 სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეებისთვის კოტელესკოპის და ფიბრანტული სივრცეების ფიბრული ვერსიების გამოყენებით ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის აგება.

აქ აგებული ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია არის B_0 სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების $\mathbf{H(CM_{B_0})}$ ფიბრული ჰომოტოპიის კატეგორიიდან ფიბრული ფიბრანტული სივრცეების $\mathbf{H(F_{B_0})}$ ფიბრულ ჰომოტოპიის კატეგორიაში ფუნქტორ-რეფლექტორის სრული ანასახი.

თეორემები 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4 და 2.1.5 გვაძლევს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2.1.6. *ვთქვათ* $i_X:(X,\pi_X)\to(\tilde{X},\pi_{\tilde{X}})$ *არის* $(X,\pi_X)\in ob(\mathbf{CM_{B_0}})$ *სივრცის ფიბრანტული გაფართოება* B_0*-ზე. მაშინ* $\mathbf{H(CM_{B_0})}$ *კატეგორიის* $[i_X]_{\mathrm{B}_0}:(X,\pi_X)\to(\tilde{X},\pi_{\tilde{X}})$ *მორფიზმი არის* $\mathbf{H(F_{B_0})}$*-რეფლექსია.*

$\{i_X:(X,\pi_X)\to(\tilde{X},\pi_{\tilde{X}})\}_{(X,\pi_X)\in ob(\mathbf{H(CM_{B_0})})}$ ოჯახი ინდუცირებს $\mathbf{H(F_{B_0})}$-რეფლექტორს $\mathrm{R}:\mathbf{H(CM_{B_0})}\to\mathbf{H(F_{B_0})}$, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\mathrm{R}((X,\pi_X))=(\tilde{X},\pi_{\tilde{X}}),(X,\pi_X)\in ob(\mathbf{H(CM_{B_0})})$$

და აკმაყოფილებს პირობებს:

კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების ყოველი $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ ფენების შემნახველი ასახვისათვის კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "{[i_X]_{\mathrm{B}_0}}"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[dd, "{[f]_{\mathrm{B}_0}}"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi_{\tilde{X}}"'] \arrow[dd, "R(f)"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
Y \arrow[rr, "{[i_Y]_{\mathrm{B}_0}}"'] \arrow[ur, "\pi_Y"'] & & \tilde{Y}. \arrow[ul, "\pi_{\tilde{Y}}"]
\end{tikzcd}$$

ყოველი B_0-ზე f ასახვისთვის არსებობს ისეთი ერთადერთი ფიბრული ჰომოტოპიური ასახვა $\tilde{f}:(\tilde{X},\pi_{\tilde{X}})\to(\tilde{Y},\pi_{\tilde{Y}})$, რომ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "\pi_X"] \arrow[dd, "f"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi_{\tilde{X}}"'] \arrow[dd, "\tilde{f}"] \\
& \mathrm{B}_0 & \\
Y \arrow[rr, "i_Y"'] \arrow[ur, "\pi_Y"'] & & \tilde{Y}. \arrow[ul, "\pi_{\tilde{Y}}"]
\end{tikzcd}$$

ამ შემთხვევაში $(i_X,i_Y):f\to\tilde{f}$ წყვილს ეწოდება ფენების შემნახველი f ასახვის B_0-ზე ფიბრანტული გაფართოება.

განსაზღვრება 2.1.7. B_0 *სივრცის მიმართ განხილული კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცეების ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორია* $\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}$ არის $\mathrm{R}:\mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}})\to\mathbf{H}(\mathbf{F}_{\mathbf{B_0}})$ რეფლექტორის სრული ანასახი.

ფიბრული ძლიერი შეიპური კატეგორიის აგების თანახმად,

$$ob(\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}})=ob(\mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}})),$$

ყოველი $(X,\pi_X),(Y,\pi_Y)\in ob(\mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}}))$ B_0-ზე სივრცისთვის

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}}((X,\pi_X),(Y,\pi_Y))=[(\tilde{X},\pi_{\tilde{X}}),(\tilde{Y},\pi_{\tilde{Y}})]_{\mathrm{B}_0}.$$

ფიბრული ძლიერი შეიპური ფუნქტორის განმარტების თანახმად, ყოველი $(X,\pi_X)\in ob(\mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}})$ ობიექტისთვის

$$\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}((X,\pi_X))=(X,\pi_X)$$

და ყოველი B_0-ზე $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ ასახვის B_0-ზე $(i_X,i_Y):f\to\tilde{f}:(\tilde{X},\pi_{\tilde{X}})\to(\tilde{Y},\pi_{\tilde{Y}})$ ფიბრანტული გაფართოებისთვის

$$\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}([f]_{\mathrm{B}_0})=\mathrm{R}([f]_{\mathrm{B}_0})=[\tilde{f}]_{\mathrm{B}_0}.$$

არსებობს კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}(\mathbf{CM}_{\mathbf{B_0}}) \arrow[rr, "\mathrm{R}"] \arrow[dr, "\mathrm{SS}_{\mathrm{B}_0}"'] & & \mathbf{H}(\mathbf{F}_{\mathbf{B_0}}) \\
& \mathbf{SSH}_{\mathbf{B_0}}. \arrow[ur, "\mathrm{J}_{\mathrm{R}}"'] &
\end{tikzcd}$$

ჯ.დიდაკისა და ს.ნოვაკის $[\mathrm{Dy}\text{-}\mathrm{N}_1]$ მსგავსად თავი 2-ის პარაგრაფ 2.2-ში განმარტებულია ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა.

განსაზღვრება 2.2.1. *ფენების შემნახველ $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ ასახვას ეწოდება ფიბრული შეიპური ექვივალენტობა, თუ ყოველი (P,π_P) $\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$-სივრცისთვის $f^*:[Y,P]_{\mathrm{B}_0}\to[X,P]_{\mathrm{B}_0}$ არის ბიექცია. f ფიბრულ შეიპურ ექვივალენტობას ეწოდება ფიბრული ძლიერი შეიპური ექვივალენტობა, თუ ყოველი ორი $g,h:(Y,\pi_Y)\to(P,\pi_P)\in\mathrm{ANR}_{\mathrm{B}_0}$ ფენების შემნახველი ასახვისთვის $g\,f$ და $h\,f$ ასახვების მაკავშირებელი $H:(X\times I,\pi_{X\times I})\to(P,\pi_P)$ ფიბრული ჰომოტოპია არის $X\times\{0,1\}$-ის მიმართ ფიბრულად ჰომოტოპიური $H^{'}(f\times 1_I)$ კომპოზიციისა, სადაც $H^{'}:(Y\times I,\pi_{Y\times I})\to(P,\pi_P)$ არის ფიბრული ჰომოტოპია g და h ასახვებს შორის.*

ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის ცნება არის ფრიად სასარგებლო და მარტივი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ობიექტი. ის აღმოჩნდა მოსახერხებელი იარაღი ფიბრული ძლიერი შეიპური თეორიის კვლევისთვის.

ფენების შემნახველი $f:(X,\pi_X)\to(Y,\pi_Y)$ ასახვის ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრი $\mathrm{dCyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})$, ანუ უბრალოდ ორმაგი ასახვის ცილინდრი B_0-ზე, არის B_0-ზე $\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})\times\mathrm{I}$ სივრცის $X\times I\cup\mathrm{Cyl}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{f})\times\{0,1\}$ ქვესივრცე.

ფიბრული ორმაგი ასახვის ცილინდრის მეშვეობით დახასიათებულია ფიბრული ძლიერი შეიპური მორფიზმები.